

Θεσσαλονίκη 12 Οκτωβρίου 2024

**Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί, 4^ο Μαθηματικό Βιωματικό
Εργαστήριο**

Δημιουργία Θεμάτων Μαθηματικών

Φύλλο Εργασίας

1^η Φάση Εργασίας:

A. Δημιουργία 1^{ου} και 3^{ου} Θέματος για τις ενδοσχολικές εξετάσεις.

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εξεταστέα Ύλη 2024-25

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου»

Εισαγωγικό κεφάλαιο Ε.2 Σύνολα

Κεφάλαιο 2ο: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

- Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους
- Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)
- Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού
- Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4)

Κεφάλαιο 3ο: Εξισώσεις

- Εξισώσεις 1ου Βαθμού
- Η Εξίσωση $x^2 = a$
- Εξισώσεις 2ου Βαθμού Κεφάλαιο 4ο: Ανισώσεις
- Ανισώσεις 1ου Βαθμού
- Ανισώσεις 2ου Βαθμού Κεφάλαιο 5ο: Πρόοδοι
- Ακολουθίες

- Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου)
- Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα n διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου)

Κεφάλαιο 6ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

- Η Έννοια της Συνάρτησης
- Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
- Η Συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Υποθετικό Σενάριο:

Για την εξέταση του μαθήματος της Άλγεβρας Α' Λυκείου οι συνάδελφοι επιλέξαν για 2^ο και 4^ο ΘΕΜΑ, από τις τρείς κληρώσεις τα παρακάτω:

ΘΕΜΑ 1

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν **γράφοντας στην κόλλα σας** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

(Μονάδες 10)

A2.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

Για να συμπληρώσουν το διαγώνισμα με 1^ο και 3^ο Θέμα, επιχείρησαν να κάνουν τις επιλογές τους από τα παρακάτω προτεινόμενα. Μελετήστε τις επιλογές, διορθώστε τα τυχόν λάθη (εκφραστικά και μαθηματικά) και αφού δεχτείτε και απορρίψετε (αιτιολογώντας), να κάντε τις επιλογές σας, για τη δημιουργία ενός «καλού διαγωνίσματος».. Δώστε και επιπλέον επιλογές.

ΘΕΜΑ 1

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha > -\beta$
2. Αν $|x| + |y| = 0$, τότε ισχύει $x=0$ ή $y=0$
3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $|\alpha| = \alpha$
4. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
5. Ισχύει ότι $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$, όπου θ θετικός αριθμός.
6. Για κάθε πραγματικό αριθμό α , ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
7. Αν $x \neq 0$, τότε η εξίσωση $|x| = -x$ είναι αδύνατη.
8. Ο νιος τός όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$.
9. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
10. Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$
11. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, με α, β, γ πραγματικοί αριθμοί είναι θετικό, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x , όταν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.
12. Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται η διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε δύο τουλάχιστον στοιχεία του συνόλου B .
13. Η ευθεία $y = ax + \beta$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν $\alpha = 0$.
14. Δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ έχουν αντίθετες τεταγμένες.

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλλα που σας δόθηκαν

15.

16.

17.

18.

19.

20.

A2.

1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$ να δείξετε ότι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$ να δείξετε ότι

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλλα που σας δόθηκαν

4.

5.

6.

7.

8.

ΘΕΜΑ 3

Πρόοδοι

1. Ένα θέατρο έχει 45 σειρές καθισμάτων. Ο αριθμός των καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι όρος της ακολουθίας (α_n) , με $\alpha_n = 120 - 2n$, όπου n φυσικός αριθμός και $n \neq 0$.

Γ1. Υπολογίζοντας τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$, να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος με 1° όρο $\alpha_1 = 118$ και διαφορά $\omega = -2$.

(Μονάδες 9)

Γ2. Να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των καθισμάτων του θεάτρου.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων της μεσαίας σειράς.

(Μονάδες 8)

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 = x + 1$, $\alpha_2 = 2x + 1$, $\alpha_3 = 7$. Να βρείτε:

A. Το x .

B. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

Γ. Το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

3. Οι αριθμοί $\alpha = x - 3$, $\beta = 1 - 2x$, $\gamma = 3x - 11$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

A. Να βρείτε το x .

B. Αν ο αριθμός α είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος της αριθμητικής προόδου, να βρείτε τον πρώτο όρο καθώς και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλα που σας δόθηκαν

4.

5.

6.

Vieta – εξίσωση - ανίσωση

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ (1), με $\lambda \neq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

Γ2. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο των ριζών P συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

Γ3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να λύσετε την ανίσωση

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$$

(Μονάδες 6)

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε να ισχύει $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -4$

(Μονάδες 6)

2. Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ και $x^2 - 16 \leq 0$.

A. Να λυθούν ξεχωριστά οι δύο ανισώσεις.

B. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι κοινές τους λύσεις.

3.A. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x + 9 = 0$.

B. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5$.

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με την ανίσωση

$$(x - 1)^2 + 4|x - 1| \geq 5.$$

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης είναι :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
(Μονάδες 7)

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης:

Γ3. Να αποδείξετε ότι $S = 2\lambda$ και $P = 4(\lambda - 1)$.
(Μονάδες 6)

Γ4. Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ ισχύει :

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλα που σας δόθηκαν

5.

6.

Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{x^2 - 9}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
(Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x) = \frac{[x] - 3}{|x| + 3}$.
(Μονάδες 9)

Γ3. Για κάθε $x \in A$, να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$.
(Μονάδες 10)

2. Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g και να τα γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

γ) Να βρείτε το συμμετρικό σημείο του ερωτήματος (β) ως προς τον άξονα y' .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{5-|2-x|}}{|x-1|-4}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' .

Γ. Να δείξετε ότι $f(4) = -\sqrt{3}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού του.

B. Να δείξετε ότι το σημείο $M(-2, -\sqrt{6})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3-1}{x-1} \right|$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

B. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in A$.

Γ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 3x$.

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλα που σας δόθηκαν

6.

7.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Β' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εξεταστέα Ύλη 2024-25

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β' Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

- Η Έννοια του Διανύσματος
- Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων
- Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2)
- Συντεταγμένες στο Επίπεδο (χωρίς την Εφαρμογή 2 που ακολουθεί την παράγραφο «Μέτρο Διανύσματος»)
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων (χωρίς την απόδειξη του τύπου της αναλυτικής έκφρασης Εσωτερικού Γινομένου και χωρίς την προβολή διανύσματος σε διάνυσμα)

Κεφάλαιο 2ο: Η Ευθεία στο Επίπεδο

- Εξίσωση Ευθείας
- Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας (χωρίς την Εφαρμογή 2)
- Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου και χωρίς την Εφαρμ 1)

Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές Τομές

- Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου)
- Η Παραβολή (χωρίς τις αποδείξεις του τύπου της εφαπτομένης και της ανακλαστικής ιδιότητας και χωρίς την Εφαρμογή 1)

- Η Έλλειψη (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης και τις Εφαρμογές)
- Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη του τύπου των ασύμπτωτων)
- Η Εξίσωση $Ax^2+By^2+Γx+Δy+E=0$ (χωρίς τη μεταφορά αξόνων)

Υποθετικό Σενάριο:

Για την εξέταση του μαθήματος **Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β' Λυκείου**, οι συνάδελφοι επιλέξαν για 2^ο και 4^ο ΘΕΜΑ, από τις τρεις κληρώσεις τα παρακάτω:

ΘΕΜΑ 1

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν **γράφοντας στην κόλλα σας** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

(Μονάδες 10)

A2.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν M είναι το μέσο του BΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

Για να συμπληρώσουν το διαγώνισμα με 1^ο και 3^ο Θέμα, επιχείρησαν να κάνουν τις επιλογές τους από τα παρακάτω προτεινόμενα. Μελετήστε τις επιλογές, διορθώστε τα τυχόν λάθη (εκφραστικά και μαθηματικά) και αφού δεχτείτε και απορρίψετε (αιτιολογώντας), να κάντε τις επιλογές σας, για τη δημιουργία ενός «καλού διαγωνίσματος».. Δώστε και επιπλέον επιλογές.

ΘΕΜΑ 1

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν **γράφοντας στην κόλλα σας** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής (C) : $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1) : y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot x$

και $(\varepsilon_2) : y = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot x$.

2. Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ

3. Η ευθεία $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{B}{A}$

4. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

5. Η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και εστία στον άξονα $\psi' \psi$ είναι $\psi^2 = 2\rho x$

6. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\psi_2)$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta} = x_1x_2 + \psi_1\psi_2$.

7. Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x x'$

8. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

9. Η παραβολή $y^2=2px$, έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = \frac{p}{2}$.

10. Αν $\det (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

11. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2+B^2-4\Gamma > 0$

παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

12. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

13. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της παραβολής $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι $\lambda = -\frac{p}{y_1}$

14. Η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\varepsilon = \sqrt{2}$.

15. Οι υπερβολές με την ίδια εκκεντρότητα λέγονται όμοιες .

16. Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$.

17. Η εκκεντρότητα της παραβολής $x^2 = 2 \cdot p \cdot y$, δίνεται από τη σχέση $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

18. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $y_1 \neq y_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

19. Ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ λέγεται μοναδιαίος.

20. Η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι $x = x_0$

21. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

22. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τότε

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλλα που σας δόθηκαν

23.

24.

25.

A2.

1. Να αποδείξετε ότι για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη παράλληλα στον άξονα γ'γ ισχύει:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα.

2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, παριστάνει κύκλο.

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλλα που σας δόθηκαν

5.

6.

7.

ΘΕΜΑ 3

Διανύσματα

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 2)$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 + 3k, 1)$ να είναι κάθετο στο $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\beta}$) = $2\pi/3$ και $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$, να βρεθεί :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{v} \cdot \vec{a}$. Μονάδες 8

β) το μέτρο $|\vec{v}|$. Μονάδες 8

γ) η γωνία των διανυσμάτων $(\vec{v}, \vec{a})$. Μονάδες 9

Ευθείες

3. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(2,3), Γ(-1,1) που είναι κορυφές τριγώνου ABΓ.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB. (7 μονάδες)

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΓΔ. (9 μονάδες)

γ) Να βρεθεί η απόσταση d(Γ, AB). (9 μονάδες)

4. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(2,3), Γ(-1,1) που είναι κορυφές τριγώνου ABΓ.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB (7 μονάδες)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ (9 μονάδες)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΒΔ (9 μονάδες)

Κωνικές Τομές

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 29 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (18 μονάδες)

β) Να βρεθεί η εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: y = 2x + 7$.

(7 μονάδες)

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 + 2\lambda(x - 2y + 1) = 0$ (1) λ πραγματικός αριθμός

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ . (7 μονάδες)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1) (8 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (8 μονάδες)

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 9y^2 - 6xy - 4 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου που οι δύο πλευρές του βρίσκονται στις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 9)

Συμπληρώστε στα πρόχειρα φύλα που σας δόθηκαν

8.

9.

10.

2^η Φάση Εργασίας:

Β. Δημιουργία 2^{ου} και 4^{ου} Θέματος για την Τράπεζα Θεμάτων.

ΘΕΜΑ 2

Αρχικά θα μελετήσουμε από την άποψη των μεταδεδομένων, τα δύο ΘΕΜΑΤΑ 2, που κληρώθηκαν στα δύο προηγούμενα μαθήματα που εξετάσαμε.

Θυμίζουμε το ΘΕΜΑ 2 για την Άλγεβρα της Α' Λυκείου:

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

Είναι το ΘΕΜΑ με αριθμό για την τράπεζα 13266.

Στα Μεταδεδομένα του Θέματος ο συγγραφέας-εισηγητής τονίζει:

Ύλη που εξετάζει:

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές Απαιτήσεις:

1. Να εφαρμόζουν κατάλληλα ορισμούς, θεωρίες, αλγόριθμους σε προβλήματα παρόμοια με αυτά που έχουν διδαχθεί στην τάξη.
3. Να επιλέγουν μια μέθοδο ή στρατηγική επίλυσης ενός απλού προβλήματος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη διδαχθεί στην τάξη, και να την εφαρμόζουν με τρόπο σαφή και οργανωμένο.

11. Να εκφράζονται χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και το συμβολισμό.

Θυμίζουμε το ΘΕΜΑ 2 για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β' Λυκείου:

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

Είναι το ΘΕΜΑ με αριθμό για την τράπεζα 14586

Στα Μεταδεδομένα του Θέματος ο συγγραφέας-εισηγητής τονίζει:

Ύλη που εξετάζει:

1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο, 1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές Απαιτήσεις:

3. Να επιλέγουν μια μέθοδο ή στρατηγική επίλυσης ενός απλού προβλήματος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη διδαχθεί στην τάξη, και να την εφαρμόζουν με τρόπο σαφή και οργανωμένο.

4. Να επιχειρηματολογούν με σαφή αναφορά σε έννοιες και στους ορισμούς τους.

11. Να εκφράζονται χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και το συμβολισμό.

ΘΕΜΑ 4

Αρχικά θα μελετήσουμε από την άποψη των μεταδεδομένων, τα δύο ΘΕΜΑΤΑ 4 που κληρώθηκαν στα δύο προηγούμενα μαθήματα που εξετάσαμε.

Θυμίζουμε το ΘΕΜΑ 4 για την Άλγεβρα της Α' Λυκείου:

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Είναι το ΘΕΜΑ με αριθμό για την τράπεζα 13120

Στα Μεταδεδομένα του Θέματος ο συγγραφέας-εισηγητής τονίζει:

Ύλη που εξετάζει:

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές Απαιτήσεις:

5. Να διερευνούν και να διατυπώνουν εικασίες τις οποίες να αποδεικνύουν επιλέγοντας την κατάλληλη στρατηγική.

6. Να αξιολογούν την αξιοπιστία μιας πληροφορίας, την αποτελεσματικότητα μιας στρατηγικής ή την ορθότητα μιας απόδειξης.

8. Να προσαρμόζουν τη λύση ενός προβλήματος όταν τα δεδομένα της εκφώνησης μεταβάλλονται.

11. Να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και τη μαθηματική λογική, σε περισσότερα από ένα πλαίσια (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό).

Θυμίζουμε το ΘΕΜΑ 4 για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β' Λυκείου:

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

Είναι το ΘΕΜΑ με αριθμό για την τράπεζα 18237

Στα Μεταδεδομένα του Θέματος ο συγγραφέας-εισηγητής τονίζει:

Ύλη που εξετάζει:

1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο, 2.1. Εξίσωση Ευθείας, 3.1 Ο Κύκλος

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές Απαιτήσεις:

1. Να προσαρμόζουν τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία στις ιδιαιτερότητες της κατάστασης που διερευνούν.

5. Να διερευνούν και να διατυπώνουν εικασίες τις οποίες να αποδεικνύουν επιλέγοντας την κατάλληλη στρατηγική.

11. Να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και τη μαθηματική λογική, σε περισσότερα από ένα πλαίσια (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό).

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε 2^ο και 4^ο ΘΕΜΑ για την Τράπεζα Θεμάτων

Υποθετικό σενάριο: Για τη Γεωμετρία της Α' Λυκείου έχουμε επιλέξει το 1^ο και 3^ο ΘΕΜΑ και θέλουμε το 2^ο και 4^ο που θα ολοκληρώσουν ένα «πετυχημένο διαγώνισμα».

Εξεταστέα Ύλη 2024-25

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» Τεύχος Α'

Κεφ. 2ο: Τα βασικά Γεωμετρικά σχήματα

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

Κεφ.3ο: Τρίγωνα

3.1 Είδη και στοιχεία τριγώνων

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός των αποδείξεων)

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός των αποδείξεων)

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (εκτός των αποδείξεων)

3.7 Κύκλος – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

3.12 Τριγωνική ανισότητα (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος I)

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Κεφ.4ο: Παράλληλες ευθείες

4.1 Εισαγωγή

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών – Ευκλείδειο αίτημα (εκτός της απόδειξης του πορίσματος II στη σελίδα 81 και των προτάσεων I , II ,III και IV)

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού n -γώνου (εκτός της απόδειξης του Πορίσματος)

Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίδια

5.1 Εισαγωγή

5.2 Παραλληλόγραμμα

5.3 Ορθογώνιο

5.4 Ρόμβος

5.5 Τετράγωνο

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα (εκτός των αποδείξεων)

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου (χωρίς το Λήμμα, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος και χωρίς το πόρισμα)

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

5.10 Τραπεζίδιο (εκτός των αποδείξεων)

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Το προτεινόμενο διαγώνισμα που θα συμπληρώσουμε το 2^ο και 4^ο ΘΕΜΑ

ΘΕΜΑ 1

A1. α) Για κάθε μια από τις παρακάτω τρεις προτάσεις, να επιλέξετε και να γράψετε στην κόλλα σας, τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση από τις προτεινόμενες.

i. Κάθε ευθεία στο επίπεδο ενός κύκλου, έχει με τον κύκλο:

- 1) δυο κοινά σημεία
- 2) ένα κοινό σημείο
- 3) κανένα κοινό σημείο
- 4) το πολύ δυο κοινά σημεία

ii. Περίκεντρο ενός τριγώνου ονομάζεται:

- 1) το σημείο τομής των υψών του τριγώνου
- 2) το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του τριγώνου
- 3) το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου
- 4) το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου

iii. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγώνιους, τότε αναγκαία θα είναι:

- 1) ρόμβος
- 2) οποιοδήποτε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιους
- 3) ορθογώνιο
- 4) τραπέζιο

β) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις δύο προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.
- ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

(Μονάδες 10)

A2. Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

A1. α) (i, 4) (ii,2) (iii,3) β) (i, Λ) (ii, Σ)

A2. Θεωρία σελ. σελ 102

Με τα δεδομένα και το σχήμα που δίνεται παρακάτω, συμπληρώστε ερωτήματα και Μονάδες ώστε να δημιουργηθεί ΘΕΜΑ 2.

Παράλληλα να συμπληρώσετε τα Μεταδεδομένα του Θέματος που θα προκύψει.

Παράγραφοι: §

Λέξεις κλειδιά:

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές απαιτήσεις:

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Οι ημιευθείες Αx, Δψ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Δηλαδή $Ax \parallel \Delta\psi \parallel B\Gamma$. Επιπλέον η γωνία ΓΑx ισούται με 30° και η γωνία ΓΔψ ισούται με 20° .

α)

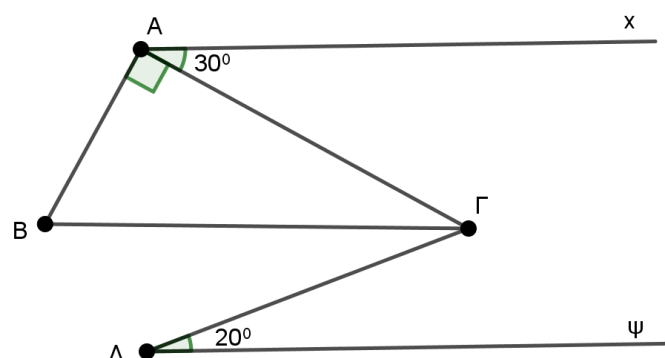
(Μονάδες ...)

β)

(Μονάδες ...)

γ) ; ; ; ; ; αν νομίζετε ότι χρειάζεται!

(Μονάδες ...)



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, το δεδομένο $\hat{A} = 36^\circ$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $36^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 144^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 72^\circ$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ (2). Από το δεδομένο $\hat{A} = 36^\circ$ και τη σχέση (2) είναι $\hat{A} = \hat{B}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες. Οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}, \hat{B}_1$ βρίσκονται ίσες πλευρές αντίστοιχα, δηλαδή $ΒΔ = ΑΔ$ (3).

β) Από τα δεδομένα έχουμε $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΕ = ΓΔ$. Με αφαίρεση κατά μέλη είναι $ΑΒ - ΑΕ = ΑΓ - ΓΔ$, δηλαδή $ΒΕ = ΑΔ$ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $ΒΔ = ΒΕ$, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Έστω ΒΖ η παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο Ζ.

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΒΔ και ΒΕ, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΔΕ του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (5). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΕ έχουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ$ και επειδή είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ και από τη σχέση (4) θα έχουμε ότι

$$36^\circ + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 144^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 72^\circ \text{ (6).}$$

Αφού ΒΖ, ΑΓ είναι παράλληλες με τέμνουσα την ΑΒ, τότε είναι $\hat{B}_3 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Αφού είναι $\hat{A} = 36^\circ$ από δεδομένα και $\hat{B}_3 = \hat{A}$ θα είναι $\hat{B}_3 = 36^\circ$.

Είναι $\Delta\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (7), όπου $\hat{B}_1 = 36^\circ$ από την (2).

Από τις σχέσεις (6) και (7) θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

Παράγραφοι: § 3.2, 4.2, 4.6

Λέξεις κλειδιά: Ισοσκελές τρίγωνο, Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές απαιτήσεις:

1. Να προσαρμόζουν τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία στις ιδιαιτερότητες της κατάστασης που διερευνούν.
5. Να διερευνούν και να διατυπώνουν εικασίες τις οποίες να αποδεικνύουν επιλέγοντας την κατάλληλη στρατηγική.
11. Να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και τη μαθηματική λογική, σε περισσότερα από ένα πλαίσια (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό).

Με τα δεδομένα και το σχήμα που δίνεται παρακάτω, συμπληρώστε ερωτήματα και Μονάδες ώστε να δημιουργηθεί ΘΕΜΑ 4.

Παράλληλα να συμπληρώσετε τα Μεταδεδομένα του Θέματος που θα προκύψει.

Παράγραφοι: §

Λέξεις κλειδιά:

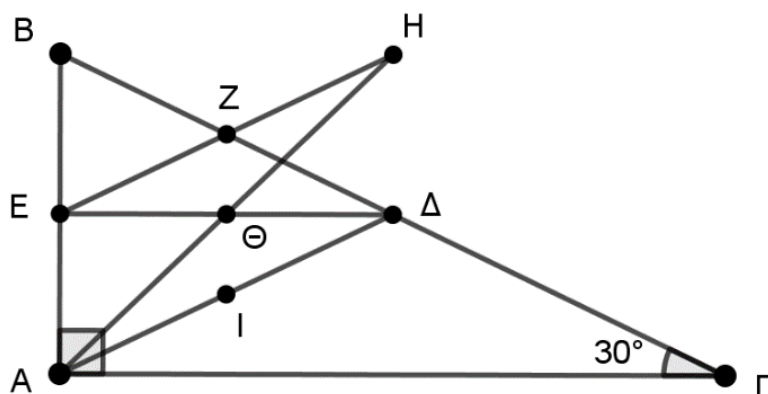
Διδακτικοί Στόχοι-Γνωστικές απαιτήσεις:

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω Δ μέσο της πλευράς ΒΓ, Ε μέσο της πλευράς ΑΒ, Ζ μέσο του τμήματος ΒΔ και Ι μέσο του τμήματος ΑΔ.

Προεκτείνουμε την ΕΖ προς το Ζ κατά τμήμα ΖΗ=ΕΖ και έστω Θ το σημείο τομής της

ΕΔ με την ΑΗ. Να αποδείξετε ότι:



- α)
(Μονάδες ...)
- β)
(Μονάδες ...)

γ)

(Μονάδες ...)

δ) ;;;;;; αν νομίζετε ότι χρειάζεται!

(Μονάδες ...)

3^η Φάση Εργασίας:

Γ. Δημιουργία Θεμάτων για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις.

Στο Βιωματικό Εργαστήριο, οι συμμετέχοντες θα συζητήσουν εκτενώς, τη δημιουργία των Θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων και ομαδοσυνεργατικά λειτουργώντας, θα αποπειραθούν ως Ομάδα, τη δημιουργία ενός πλήρους διαγωνίσματος που θα μπορούσε «να προταθεί» στις ερχόμενες Πανελλαδικές.

Ας θυμηθούμε το φετινό ΘΕΜΑ Β των Πανελλαδικών

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ και

$h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

Ας επιχειρήσουμε να φτιάξουμε ένα δικό μας ΘΕΜΑ Β προσθέτοντας ερωτήματα στα παρακάτω δεδομένα, τα οποία δίνει ο αγαπητός συνάδελφος που μας φιλοξενεί: Γιάννης Σαράφης.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και

$$h(x) = \ln x.$$

B1.

Μονάδες

B2.

Μονάδες

B3.

Μονάδες

B4.

Μονάδες

Ας θυμηθούμε το φετινό ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών του 2018

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5m^2 .

Μονάδες 10

Ας επιχειρήσουμε να φτιάξουμε ένα δικό μας ΘΕΜΑ Γ προσθέτοντας ερωτήματα στα παρακάτω δεδομένα που δανειζόμαστε από την άσκηση Α5 του σχολικού βιβλίου της σελίδας 27.

ΘΕΜΑ Γ

Σύρμα μήκους $\ell = 20\text{ cm}$ κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη $x\text{ cm}$ και $(20 - x)\text{ cm}$. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων, ως συνάρτηση του x είναι η $E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(20 - x)^2$ με $x \in (0, 20)$.

Μονάδες 6

Γ2.

Μονάδες
Γ3.

Μονάδες

Γ4.

Μονάδες