# ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Εισηγητής – Συντονιστής**
**Γιάννης Θωμαΐδης**
**Δρ. Μαθηματικών – τ. Σχολικός Σύμβουλος**

**Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για την ανανέωση και τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας σε όλο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης:**
**Ιστορική εξέλιξη του δικτύου εννοιών:**
**Αρνητικοί αριθμοί – Απόλυτη τιμή – Διάταξη στην αριθμητική ευθεία – Αξιωματική θεμελίωση του R**

**ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΚΑΛΑΜΑΡΙ**
**Θεσσαλονίκη, 23 Νοεμβρίου 2019**

## ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και τα αντίστοιχα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών του Γυμνασίου που χρησιμοποιούνται από το 2007, περιέχουν πολλές αναφορές στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Οι αναφορές αυτές εκτείνονται από τους ειδικούς σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών μέχρι τη διδακτική μεθοδολογία και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων. Συγκεκριμένα, αναφέρονται τα εξής (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 2002, σσ.311, 367-369):

### Ειδικοί σκοποί

Με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο επιδιώκονται οι παρακάτω επιμέρους σκοποί:

... Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).

### Διδακτική μεθοδολογία

Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας όπως:

– Μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων

– Διαθεματικά

– Με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών (η Ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα πλούσιο πεδίο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας).

### Απαιτούμενο διδακτικό υλικό

Επίσης στα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να περιλαμβάνεται η καταγραφή των μεγάλων ιστορικών στιγμών που καθόρισαν διαδοχικά την πορεία των Μαθηματικών, ώστε ο μαθητής να αποκτά γνώση της γένεσης των ιδεών τους, προϋπόθεση απαραίτητη για την κατάκτηση κάθε γνωστικού αντικειμένου. Παράλληλα πρέπει να δίνεται έμφαση στις σύγχρονες επιστημονικές κατακτήσεις, όπως επίσης και στις συνέπειες τους σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο.

### Προδιαγραφές διδακτικών βιβλίων Μαθηματικών Γυμνασίου

Τα ιστορικά σημειώματα δεν είναι απαραίτητο να εντάσσονται ξεχωριστά και στο τέλος κάθε ενότητας. Μπορεί (όπου αυτό κρίνεται) να παρουσιάζονται (με σύντομο τρόπο) και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου.

Τα προηγούμενα εξειδικεύτηκαν ακόμη περισσότερο όταν προκηρύχθηκε ο διαγωνισμός συγγραφής των διδακτικών βιβλίων σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ./Α.Π.Σ.:

**Συμπληρωματικές προδιαγραφές για τη συγγραφή έντυπου εκπαιδευτικού υλικού των Μαθηματικών**

Η ανάπτυξη της ύλης του κεφαλαίου θα πρέπει να βασίζεται στο κείμενο, στις εικόνες, στα σχήματα, διαγράμματα και στους πίνακες που συνοδεύουν το κείμενο και σχετίζονται άμεσα με αυτό.

Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στη σύνδεση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες. Οι εφαρμογές αποτελούν το πρόσφορο έδαφος για την επίτευξη αυτού του στόχου, θα πρέπει όμως είτε να αναφέρονται στην πραγματική ζωή είτε να έχουν μια ιστορική διάσταση.

Είναι αναγκαία η ένθεση ιστορικών σημειωμάτων, τα οποία κρίνεται σκόπιμο να είναι ενταγμένα στο κυρίως κείμενο. Θα πρέπει, επίσης, να μην είναι γενικόλογα, να αφορούν συγκεκριμένες προτάσεις του εκάστοτε κεφαλαίου και να μην εξαντλούνται σε βιογραφικές λεπτομέρειες και σχετική ανεκδοτολογία.

Οι συγγραφικές ομάδες, συνεπείς με τις υποδείξεις του αναλυτικού προγράμματος αλλά και τους όρους του διαγωνισμού συγγραφής, ενσωμάτωσαν στα νέα βιβλία πολλά ιστορικά σημειώματα, σχόλια, εικόνες και σχετικές δραστηριότητες. Με την αποτίμηση αυτού του υλικού ασχοληθήκαμε διεξοδικά όταν κυκλοφόρησαν τα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου (Θωμαΐδης 2008). Για το ζήτημα των αρνητικών αριθμών με το οποίο θα ασχοληθούμε στο σημερινό εργαστήριο, εστιάζουμε το ενδιαφέρον σε δύο ιστορικά σημειώματα από το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου τα οποία αφορούν την πρώιμη εξέλιξη των αρνητικών αριθμών (Βανδουλάκης κ.α., 2016, σσ.115, 130).

> *Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσανγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).*
> *Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός* **Διόφαντος** *(200 - 284 μ.Χ.), που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.*

> *Ο Διόφαντος πρώτος εισάγει την έννοια «ΛΕΙΨΙΣ» (αρνητικός) διατυπώνοντας τους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έκφραση:*
> «ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΛΕΙΨΙΝ ΠΟΙΕΙ ΥΠΑΡΞΙΝ, ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΥΠΑΡΞΙΝ ΠΟΙΕΙ ΛΕΙΨΙΝ»

## ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αν επιχειρήσουμε να αξιολογήσουμε τα δύο ιστορικά σημειώματα σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, θα πρέπει να εξετάσουμε αν αυτά παρέχουν ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση των αρνητικών αριθμών ή αν οι μαθητές που θα τα διαβάζουν θα αποκτήσουν γνώση της γένεσής τους. Ήδη όμως, με την πρώτη ανάγνωση των δύο σημειωμάτων, εγείρονται κριτικά ερωτήματα που κάθε άλλο παρά συμβάλλουν στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών μέσα από τις παρεχόμενες ιστορικές πληροφορίες:

**1)** Με ποιο τρόπο εμφανίζονται για πρώτη φορά οι αρνητικοί αριθμοί στο συγκεκριμένο Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο;

**2)** Γιατί ο Διόφαντος, ενώ χρησιμοποιεί τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς, δεν δέχεται τις αρνητικές λύσεις των προβλημάτων;

**3)** Τι ακριβώς σημαίνουν οι εκφράσεις «λείψις επί λείψιν ποιεί ύπαρξιν» και «λείψις επί ύπαρξιν ποιεί λείψιν»; Μήπως είναι η αρχαιοελληνική διατύπωση των κανόνων «μείον επί μείον κάνει συν» και «μείον επί συν κάνει μείον»;

**4)** Εάν πράγματι υπήρχε ένας τόσο ανεπτυγμένος λογισμός με αρνητικούς στην αρχαία Ελλάδα, και με δεδομένο ότι δεν ήταν αποδεκτές από τον Διόφαντο οι αρνητικές λύσεις των προβλημάτων, τότε ποιος λόγος προκάλεσε την επινόηση των αρνητικών αριθμοί και ποιο σκοπό εξυπηρετούσε η χρήση τους;

Ο καθηγητής ή ο μαθητής που θα κάνει τον κόπο να διαβάσει τα προηγούμενα ιστορικά σημειώματα έχει μάλλον δύο επιλογές. Ή θα εγκαταλείψει κάθε προσπάθεια «διδακτικής αξιοποίησης» της Ιστορίας των Μαθηματικών, ή θα στραφεί στην αναζήτηση άλλων ιστορικών πηγών για να βρει απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα. Αν και νομίζουμε ότι η πλειοψηφία θα ακολουθήσει τον πρώτο δρόμο, θα επιχειρήσουμε να δώσουμε εδώ κάποια στοιχεία της πλούσιας και δαιδαλώδους εξέλιξης των αρνητικών αριθμών[1], από τα οποία μπορούν να αντληθούν ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα για τη διδασκαλία.

## Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τα τρία κείμενα που ακολουθούν περιγράφουν με χαρακτηριστικό τρόπο το χάσμα ανάμεσα στην «εργαλειακή» από την «εννοιολογική» κατανόηση των μαθηματικών

[1] Περισσότερα στοιχεία για την ιστορική εξέλιξη των αρνητικών αριθμών υπάρχουν στις εργασίες μας (Θωμαΐδης, 1991· Thomaidis, 1993). Μια νέα αντίληψη για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει υιοθετηθεί στο Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου που δημοσιεύτηκε το 2011 (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

εννοιών. Πρόκειται για τη μεγάλη και διαχρονική δυσκολία ορισμένων σημαντικών προσωπικοτήτων αλλά και μαθητών με ιδιαίτερες ικανότητες στα Μαθηματικά, οι οποίοι δεν έχουν κανένα πρόβλημα στην εκτέλεση των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς, αλλά αδυνατούν να κατακτήσουν το νόημα αυτών των πράξεων και ιδιαίτερα τον λεγόμενο «κανόνα των προσήμων».

**ΠΡΩΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ**

• Από το μυθιστόρημα του Stendhal (ψευδώνυμο του Marie-Henri Beyle): *Vie de Henry Brulard* (1835). Επανέκδοση: Gallimard, Paris (1973).

Νόμιζα ότι τα Μαθηματικά είχαν αποκλείσει τελείως την υποκρισία και, μέσα στη νεανική μου αφέλεια, πίστευα ότι το ίδιο πρέπει να ισχύει για όλες τις επιστήμες που τα χρησιμοποιούν. Φανταστείτε πως ένοιωσα όταν αντιλήφθηκα ότι κανείς δεν μπορούσε να μου εξηγήσει γιατί μείον επί μείον κάνει συν! (Αυτός είναι ένας από τους θεμελιώδεις νόμους της Άλγεβρας). Ήταν κακό που δεν μου εξήγησαν αυτή τη δυσκολία (οδηγεί σε αλήθειες και άρα, αναμφίβολα, μπορεί να εξηγηθεί).

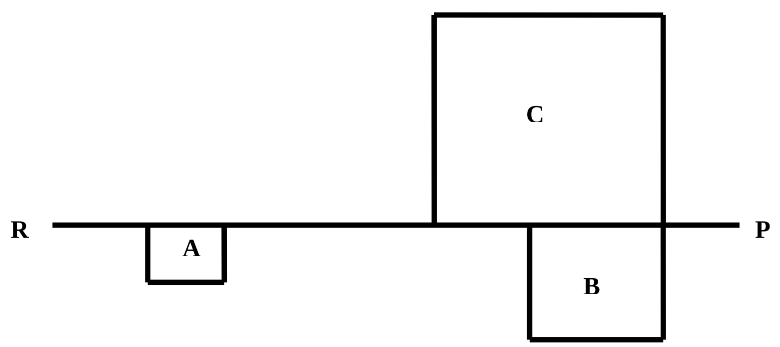
Το χειρότερο όμως είναι ότι όσοι επιχείρησαν να μου το εξηγήσουν, χρησιμοποίησαν επιχειρήματα τα οποία προφανώς δεν καταλάβαιναν ούτε οι ίδιοι.

Ο κ. Chabert, τον οποίο πίεσα έντονα, βρέθηκε σε αμηχανία. Επανέλαβε το ίδιο μάθημα που είχε προκαλέσει την ένστασή μου και στο πρόσωπό του διάβασα αυτό που σκεπτόταν: Μα είναι μια τυπικότητα, ο καθένας δέχεται αυτή την εξήγηση. Ο Euler και ο Lagrange, που γνώριζαν σίγουρα όσα και εσύ, το ανέχτηκαν.

Χρειάστηκε πολύ χρόνο για να καταλάβω ότι η ένστασή μου στο θεώρημα: *μείον επί μείον κάνει συν* απλά δεν χωρούσε στο κεφάλι του κ. Chabert, ότι ο κ. Dupuy σταθερά θα απαντούσε με ένα υπεροπτικό χαμόγελο, και ότι τα μαθηματικά αστέρια της τάξης μου που πλησίασα για να τα ρωτήσω θα με κορόιδευαν.

Τελικά είπα στον εαυτό μου αυτό που λέω και σήμερα: *Πρέπει* μείον επί μείον να κάνει συν. Σε τελευταία ανάλυση, αυτός ο κανόνας αφού χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς συνεχώς θα οδηγεί προφανώς σε *αληθινά και απρόσβλητα* εξαγόμενα.

Το επόμενο σχήμα μου προκάλεσε πραγματικό πονοκέφαλο:



Ας υποθέσουμε ότι RP είναι η γραμμή που χωρίζει τις θετικές από τις αρνητικές τιμές. Οτιδήποτε βρίσκεται επάνω είναι θετικό και οτιδήποτε βρίσκεται κάτω είναι αρνητικό. Πώς είναι δυνατόν, παίρνοντας το τετράγωνο B τόσες φορές όσες μονάδες υπάρχουν στο τετράγωνο A, να το μετατρέψω στο τετράγωνο C από την άλλη πλευρά; Ή για να χρησιμοποιήσω μια όχι και τόσο κομψή σύγκριση, την οποία έκανε ακόμη πιο άχαρη η μακρόσυρτη προφορά του κ. Chabert:

Ας υποθέσουμε ότι οι αρνητικές ποσότητες αντιπροσωπεύουν τα χρέη κάποιου. Πώς είναι δυνατόν να κερδίσει αυτός 5.000.000, δηλαδή πέντε εκατομμύρια, πολλαπλασιάζοντας ένα χρέος 10.000 φράγκων με ένα χρέος 500 φράγκων;

**ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΙΜΕΝΟ**

- Από την εργασία του Γ.-Σ. Σμυρλή: Οι συνέπειες από την κατάργηση της Ευκλειδείου Γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση της Κύπρου ή Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης; *Μαθηματική Επιθεώρηση* 55, σσ.45–56 (2001).

Πρόσφατα σε κάποια κοινωνική εκδήλωση, σε συνομιλία που είχα με τον Μητροπολίτη Πάφου Χρυσόστομο, ο Πανιερώτατος μου είπε ότι ποτέ δεν μπόρεσε να καταλάβει γιατί: *Πλην επί πλην ίσον συν*, και συγκεκριμένα: *Πώς αυτό μπορεί να εξηγηθεί μέσω χειροπιαστών παραδειγμάτων*.

Το ερώτημα βεβαίως αυτό είναι ουσιαστικό και για να δοθεί ικανοποιητική απάντηση απαιτήθηκε αρκετός χρόνος.

Η κατανόηση του ανωτέρω ερωτήματος προϋποθέτει την κατανόηση των αρνητικών αριθμών.

Παραδείγματα τέτοιων αποτελούν η κάτω του μηδενός θερμοκρασία, το δάνειο εις αντιδιαστολήν της καταθέσεως, η απώλεια ή μείωση χρημάτων ή άλλων αγαθών. Ο δε αρνητικός χρόνος αποτελεί τον παρελθόντα.

Έτσι, αν για παράδειγμα, υποτεθεί ότι υπό κατάλληλες συνθήκες η θερμοκρασία σώματος μειούται με ρυθμό $5^o$ C, τότε αυτό σημαίνει ότι δύο ώρες πριν η θερμοκρασία του σώματος αυτού ήταν κατά $10^o$ C ψηλότερη απ’ ότι τώρα. Δηλαδή

$$(-2 \text{ ώρες}) \times (-5^o \text{ C/ώρα}) = +10^o \text{ C}.$$

Έθεσα το ερώτημα αυτό σε φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου. Συγκεκριμένα τους ζήτησα να μου δώσουν χειροπιαστό παράδειγμα μέσω του οποίου γίνεται κατανοητό γιατί: *Πλην επί πλην ίσον συν*. Οι απαντήσεις που έλαβα ήταν κάτι περισσότερο από αποθαρρυντικές. Ένας απ’ αυτούς είπε: *Μα έτσι δεν ορίζεται*;

Έμαθαν λοιπόν οι απόφοιτοι των λυκείων μας να δέχονται ό,τι τους λέγεται κατά τρόπο δογματικό, έμαθαν να μην σκέφτονται, να μην διερωτώνται.

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Πανιερώτατος, απόφοιτος κλασικού λυκείου τη δεκαετία του 60, έμαθε αν μη τι άλλο να διερωτάται γιατί ισχύουν όλοι αυτοί οι αφηρημένοι μαθηματικοί νόμοι. Έμαθε να αμφισβητεί.

Δυστυχώς οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές μας, που αποτελούν την ελίτ των κυπριακών λυκείων έχουν μάθει να δέχονται τα πάντα δογματικά και απλώς να εφαρμόζουν συνταγές.

## ΤΡΙΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

• Από την εργασία του Ν. Κισκύρα: Η διδασκαλία των περί αντιστρόφου θεωρήματος ή προβλήματος σαν έκφραση της διδακτικής των Μαθηματικών. *Πρακτικά 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.391–410. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα (1992).

Αξίζει να αναφέρουμε και δύο «ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ» για τις οποίες ποτέ δεν πήραμε ΟΡΘΗ απάντηση από Σπουδαστές Φροντιστηρίων Ανώτατης Εκπαίδευσης.

1. Ο αριθμός των διαγωνίων δ ενός κυρτού πολυγώνου με αριθμό πλευρών ν δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$$

Για αριθμό πλευρών ν = 20 έχουμε διαγωνίους $\delta = \frac{20(20-3)}{2} = 170$.

**Αντιστρόφως** αν ένα κυρτό πολύγωνο έχει 170 διαγωνίους ποιος είναι ο αριθμός των πλευρών του;

Με βάση τον τύπο $170 = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$ εύρισκαν $\nu = \frac{3 \pm 37}{2}$ και ν = 20, γιατί η τιμή ν = –17 σαν αρνητική απορρίπτεται.

Στο ερώτημα γιατί με το ν = 20 προκύπτει και το ν = –17 δεν λάβαμε ποτέ απάντηση.

Κάθε φορά αναγκαζόμαστε να δώσουμε την εξήγηση.

## ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

**1)** Ποιο είναι το διδακτικό πρόβλημα που αναδεικνύεται μέσα από τα κείμενα των Stendhall, Σμυρλή και Κισκύρα;

**2)** Ποια ερμηνεία υπάρχει για τη διαχρονική παρουσία του συγκεκριμένου προβλήματος διδασκαλίας και μάθησης;

**3)** Μπορεί να συμβάλει στην αντιμετώπιση του προβλήματος η γνώση της ιστορικής εξέλιξης των αρνητικών αριθμών;

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2007) *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2007α) *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Βιβλίο Εκπαιδευτικού. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Γαβριήλ Α. (2014) *Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή του*. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία. Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα.

Θωμαΐδης, Γ. (1991) Ιστορικά προβλήματα στη διδασκαλία των Μαθηματικών – Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Στο Θ. Κρητικός [επιμ.] *Πρακτικά του Συμποσίου για τη Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των* Επιστημών σσ.127–137. Ελληνική Εταιρεία Ιστορίας Επιστημών και Τεχνολογίας, Θεσσαλονίκη 27–29 Αυγούστου 1991.

Θωμαΐδης, Γ. (1995). *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιων και εμπόδια μάθησης (η περίπτωση της απόλυτης τιμής)*. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Γ. (2008) Στιγμιότυπα και εικόνες από τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα νέα βιβλία του Γυμνασίου. Στο Μ. Κούρκουλος & Κ. Τζανάκης [επιμ.] *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* σσ. 395–406. Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης. Ρέθυμνο.

Θωμαΐδης Γ. (2009) Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Στο Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών [επιμ.] *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* σσ.193–219. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*. Τόμος Α΄. Αθήνα (Δημοσιεύτηκαν επίσης στο Φ.Ε.Κ. Β΄ 303, 13 Μαρτίου 2003).

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση – Γυμνάσιο*, Αθήνα.

Σταμάτης, Ε. (1963) *Διοφάντου Αριθμητικά. Η Άλγεβρα των Αρχαίων Ελλήνων*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι.

Baldino, R. R. (1997) On the epistemology of integers. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 17, no 2, pp.211–250.

Euler, L. (1770/1984) *Elements of Algebra* (translated from the French edition of 1774 by J. Hewlett). 5th Edition, London: Longman, Orme & Co. (1840). Reprinted, Springer–Verlag, New York (1984).

Hart, K.M. (1981) *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*. John Murray, London.

Kilhamn, C. (2011) *Making Sense of Negative Numbers*. Doctoral Thesis. Göteborgs Universitet, Göteborg.

Klein, F. (1909/1924) *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic – Algebra – Analysis* (translated by E.R. Hedrick & C.A. Noble). Dover, New York.

Robitaille, D.E. (1989) Teaching practices employed in the teaching of Algebra and Geometry. In D.E. Robitaille [ed.] *Evaluation and Assessment in Mathematics Education* pp.59–68. Unesco, Paris.

Rapke, T. (2009) Thoughts on Why (–1) (–1) = +1. *Mathematics Teacher*, Volume 102, Number 5, pp.374–376.

Sip J. (1988) Signed numbers in junior secondary school. In E. Barbin [ed.] *Towards a Historical Perspective in the Teaching of Mathematics* pp.6-1 to 6-16. Committee Inter – Irem Epistemology and History of Mathematics.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of Negative Numbers in the Early 17th Century. An Approach for Didactic Reasons. *Science & Education* 2, pp.69-86.

Viète, F. (1591/1983) *The Analytic Art* (translated from the Latin by T. R. Witmer). The Kent State University Press, Kent, Ohio.