Υλικό από το βιωματικό εργαστήριο με θέμα
«Η σημασία των αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών»

Στους συμμετέχοντες δόθηκαν τρία ερωτήματα και αφού χωρίστηκαν σε ομάδες τα επεξεργαστηκαν και ακολούθησε συζήτηση. Ακολουθούν τα τρία ερωτήματα και μια σύντομη περιγραφή της συζήτησης που ακολούθησε.

1. Ένας μαθητής σας ρωτάει αν είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός:
«Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα αν έχουν ίσες διαγωνίους είναι ίσα.»
Τι θα του απαντούσατε και γιατί;

Στόχος της ερώτησης ήταν να προκληθεί συζήτηση σχετικά με την μαθηματική και διδακτική αποτελεσματικότητα ενός αντιπαραδείγματος.
Στη συζήτηση στο εργαστήριο προτάθηκαν τα παρακάτω αντιπαραδειγμάτα:
α) Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο με ίσες διαγωνίους.
Τέτοια αντιπαραδείγματα μπορούμε να κατασκευάσουμε επιλέγοντας τρεις αριθμούς α,β,γ ώστε $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Το τετράγωνο με πλευρά α και το ορθογώνιο με πλευρές β,γ έχουν ίσες διαγωνίους αλλά δεν είναι ίσα.
Αυτό το αντιπαράδειγμα απορρίπτει τον ισχυρισμό αλλά είναι«ειδικό αντιπαράδειγμα», με την έννοια ότι αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο ο ισχυρισμός να ισχύει στην περίπτωση δύο ορθογωνίων που κανένα δεν είναι τετράγωνο.

β) Δύο διαφορετικά ορθογώνια με ίσες διαγωνίουςπου κανένα δεν είναι τετράγωνο.
Τέτοια αντιπαραδείγματα μπορούμε να κατασκευάσουμε επιλέγοντας τέσσερεις διαφορετικούς αριθμούς α,β,γ,δ ώστε $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$. Τα ορθογώνια με πλευρές α,β και γ,δ έχουν ίσες διαγωνίους, δεν είναι ίσα και κανένα δεν είναι τετράγωνο.
Αυτό το αντιπαράδειγμα είναι «γενικό αντιπαράδειγμα» με την έννοια ότι δεν αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο που άφηνε το προηγούμενο και ο τρόπος κατασκευής του μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε πολλά διαφορετικά αντιπαραδείγματα. Όμως δεν αναδεικνύει την γεωμετρική αιτία που προκαλεί την μη ισότητα των ορθογωνίων.

γ) Σε ένα κύκλο δύο διάμετροι ορίζουν ένα ορθογώνιο με διαγωνίους αυτές τις διαμέτρους. Αν θεωρήσουμε δύο ζεύγη διαμέτρων ώστε η γωνία που σχηματίζει το ένα ζεύγος να είναι διαφορετική από τη γωνία που σχηματίζει το άλλο, τότε τα δύο ορθογώνια που ορίζονται δεν είναι ίσα αλλά έχουν ίσες διαμέτρους.
Αυτό το αντιπαράδειγμα είναι αυτό που στη βιβλιογραφία ονομάζεται «διαφανές αντιπαράδειγμα». Είναι γενικό αντιπαράδειγμα και επιπλέον αναδεικνύει την αιτία που δεν ισχύει ο ισχυρισμός, η μη ισότητα των γωνιών που σχηματίζουν οι διαγώνιοι. Αυτή η διαπίστωση μας δίνει τη δυνατότητα να διατυπώσουμε τον σωστό ισχυρισμό:
Δύο ορθογώνια με ίσες διαγωνίους είναι ίσα αν και μόνον αν οι γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του ενός είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του άλλου.

Το συμπέρασμα της συζήτησης ήταν ότι ένα αντιπαράδειγμα απορρίπτει ένα λανθασμένο ισχυρισμό αλλά όλα τα αντιπαραδείγματα δεν έχουν το ίδιο μαθηματικό και διδακτικό αποτέλεσμα. Υπάρχουν τα «ειδικά αντιπαραδείγματα» που αφήνουν ανοικτό το ενδεχόμενο θεωρηθεί ότι αποτελούν εξαιρέσεις οι περιπτώσεις για τις οποίες δεν ισχύει ο ισχυρισμός.
Υπάρχουν τα «γενικά αντιπαραδείγματα» που δεν αφήνουν τέτοιο ενδεχόμενο και που ο τρόπος που τα κατασκευάζουμε μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε και άλλα αντιπαραδείγματα,

αλλά δεν αναδεικνύουν την αιτία για την οποία δεν ισχύει ο ισχυρισμός. Τέλος υπάρχουν τα «διαφανή αντιπαραδείγματα» που όχι μόνο είναι γενικά με την προηγούμενη έννοια αλλά αναδεικνύουν την αιτία για την οποία ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και βοηθούν στη διατύπωση ενός νέου σωστού ισχυρισμού.

2. Πως θα εξηγούσατε στους μαθητές σας ότι από τις ανισότητες $α<β$ και $γ<δ$, όπου α,β,γ,δ θετικοί αριθμοί, δεν προκύπτει πάντοτε $\frac{α}{γ} < \frac{β}{δ}$;

Στόχος αυτής της ερώτησης ήταν να συζητηθούν αντιπαραδείγματα που θα δείχνουν την αιτία που δεν ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.
Το συμπέρασμα της συζήτησης ήταν ότι η αιτία που κάνει να μην ισχύει η ιδιότητα είναι ότι ένα κλάσμα με θετικούς όρους και σταθερό αριθμητή όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής του τόσο μικραίνει το κλάσμα και μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Έτσι αν έχουμε τρεις θετικούς αριθμούς α,β,γ με $α<β$ τότε μπορούμε, όποιο και να είναι το κλάσμα $\frac{α}{γ}$ πάντα μπορούμε να βρούμεθετικό δ με $γ<δ$ ώστε$\frac{β}{δ} < \frac{α}{γ}$.
Επομένως αντιπαραδείγματα με πολύ μεγάλο δ και επεξήγηση με βάση τα παραπάνω βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν όχι μόνο ότι δεν ισχύει η ιδιότητα αλλά και γιατί δεν ισχύει.

3. Σε μια τάξη Α' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας, μετά το μάθημα για τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, ο καθηγητής βάζει στους μαθητές την παρακάτω άσκηση:
« Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΗ ώστε ΑΒ=ΕΖ=7cm, ΒΓ=ΖΗ=12 cm και οι γωνίες ΑΓΒ και ΕΗΖ είναι 30^{o}. Εξετάστε αν τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.»
Ένας μαθητής απαντάει:
«Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μια γωνία ίση. Άρα είναι ίσα.»
Ποια θεωρείτε ότι πρέπει να είναι η διδακτική αντιμετώπιση από τον καθηγητή;

Ο ισχυρισμός του μαθητή στο υποθετικό σενάριο της ερώτησης είναι λανθασμένος. Η πιθανή αιτία είναι ότι ο μαθητής εφαρμόζει το γνωστό κριτήριο ισότητας τριγώνων σε μια περίπτωση που δεν ισχύουν οι υποθέσεις του. Στόχος της ερώτησης ήταν να προκληθεί συζήτηση σχετικά με την μαθηματικά και διδακτικά αποδεκτή διαδικασία αντιμετώπισης του λάθους του μαθητή.
Στη συζήτηση αρχικά δόθηκε από μια ομάδα αντιπαράδειγμα με γεωμετρική κατασκευή δύο τριγώνων, ενός οξυγωνίουκαι ενός αμβλυγωνίου, που ικανοποιούν τις υποθέσεις της άσκησης. Στη συνέχειαο συντονιστής έθεσε το ερώτημα αν χρειάζεται το αντιπαράδειγμα ή θα ήταν αρκετή η υπενθύμηση των τριών κριτηρίων ισότητας τριγώνων και η διαπίστωση ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την περίπτωση.Η ερώτηση αυτή προκάλεσε αρκετή συζήτηση. Μια άποψη ήταν ότι καλό είναι να δοθεί αντιπαράδειγμα αλλά θα ήταν αρκετή η αναφορά στα γνωστά κριτήρια ισότητας τριγώνων και η διαπίστωση ότι κανένα δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Η άποψη του συντονιστή ήταν ότι δεν είναι μαθηματικά ορθό το επιχείρημα ότι ένας ισχυρισμός είναι λανθασμένος επειδή δεν μπορεί να αποδειχθεί με χρήση αυτών που γνωρίζουμε. Μπορεί να υπάρχει κάτι που δεν γνωρίζουμε και το οποίο να αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Επιπλέον, όταν ο ισχυρισμός αφορά συγκεκριμένη περίπτωση,μπορεί να μην εφαρμόζονται γενικά θεωρήματα αλλά ο ισχυρισμός να είναι σωστός. Ειδικά για την περίπτωση που αναφέρεται η ερώτηση, αν ήταν σωστό το επιχείρημα ότι αφού δεν εφαρμόζονται τα γνωστά κριτήρια ισότητας τριγώνων ο ισχυρισμός του μαθητή είναι λανθασμένος, θα έπρεπε για τον ίδιο λόγο και ο ισχυρισμός ότι δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΗ που έχουν ΑΒ=ΕΖ=6cm, ΒΓ=ΖΗ=12 cm και τις γωνίες ΑΓΒ και ΕΗΖ ίσες με 30^{o}

είναι ίσα να είναι λανθασμένος. Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί ένα τρίγωνο με αυτά τα στοιχεία είναι οθογώνιο, άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Δηλαδή, αν η σχέση AB=EZ=7cm αντικατασταθεί με τη σχέση AB=EZ=6cm το ίδιο επιχείρημα μας οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα. Αυτό δείχνει ότι το επιχείρημα δεν είναι μαθηματικά ορθό και επομένως δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στη διδασκαλία.