

## Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις δυσκολότερες μαθηματικές ιδέες για τους μαθητές και τις μαθήτριες. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας.

- Η πρώτη συνδέεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή, συν-μεταβολή, σύνολο και άλλες.
- Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης.
- Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να εκλάβουν οι μαθητές/ήτριες την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο. Η έρευνα δείχνει ότι οι περισσότεροι/ες μαθητές/ήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο.

**Εφημερίδα της Κυβερνήσεως (2011). Έγκριση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για την Πιλοτική τους Εφαρμογή του διδακτικού πεδίου Μαθηματικά, Φ.Ε.Κ. 2281, Τεύχος Β', 12/10/2011.**

## Συναρτήσεις: Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα

- A1.** Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο.
- A2.** Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση.
- A3.** Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών.
- A4.** Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- A5.** Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.
- A6.** Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο).
- A7.** Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης.
- A9.** Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο ανάλογων ποσών.
- A10.** Διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής  $y = ax$ . Σχεδιάζουν τη γραφική παράστασή τους και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία. Εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και διερευνούν το ρόλο του  $a$ .
- A11.** Διερευνούν τη μεταβολή του  $y$  για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του  $x$  σε συναρτήσεις της μορφής  $y = ax$ . Συγκρίνουν με συναρτήσεις που η αντίστοιχη μεταβολή του  $y$  δεν είναι σταθερή (π.χ. τετραγωνικές).
- A12.** Επιλύουν (αλγεβρικά και γραφικά) προβλήματα ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας την συνάρτηση  $y = ax$ .
- A13.** Μοντελοποιούν και επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα με συναρτήσεις της μορφής  $y = ax + \beta$ .
- A14.** Διερευνούν τη συνάρτηση  $y = ax + \beta$ . Εξετάζουν το ρόλο του  $a$  (σταθερή μεταβολή του  $y$  για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του  $x$ ) και του  $\beta$  («σημείο» τομής με τον άξονα των  $y$ ).
- A15.** Βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $y = ax + \beta$  με τους άξονες.

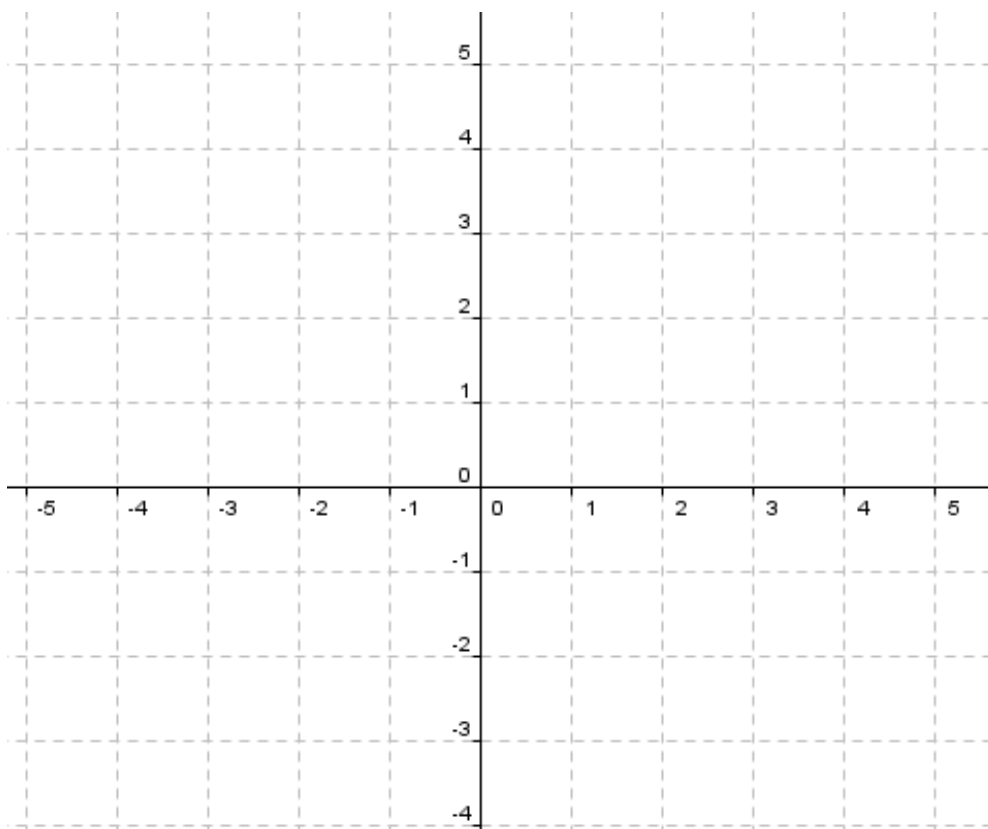
## 1η Πρόταση Σχεδίου Διδασκαλίας

1.1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α)  $y = -2x$ ,

β)  $y = -2x + 3$

γ)  $y = -2x - 3$



δ) Τι παρατηρείτε;

.....

.....

.....

.....

1.2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 5 και διέρχεται από το σημείο  $M(2, -3)$ .

.....

.....

1.3. Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A(0, 5)$  και  $B(3, 2)$ . Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας.

.....  
 .....  
 .....  
 .....

β) τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  που τέμνει η ευθεία τον άξονα  $x'x$ .

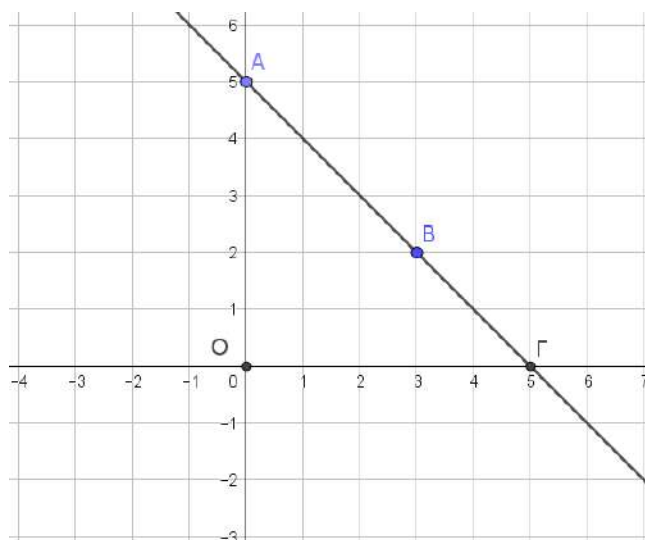
.....

γ) τις αποστάσεις  $AB$  και  $AO$  όπου το σημείο  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

.....  
 .....

δ) το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ .

.....  
 .....  
 .....



## 2η Πρόταση Σχεδίου Διδασκαλίας

**2.1. Το κινητό της Κατερίνας.** Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση 0,5 € για κάθε λεπτό ομιλίας.

**α)** Αν ονομάσουμε  $x$  το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και  $y$  το ποσό πληρωμής (σε €) που αντιστοιχεί στο χρόνο ομιλίας, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

|                    |   |   |   |    |    |    |
|--------------------|---|---|---|----|----|----|
| Χρόνος ομιλίας $x$ | 0 | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Ποσό πληρωμής $y$  |   |   |   |    |    |    |

**β)** Να εκφράσετε το ποσό πληρωμής  $y$  ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας  $x$ .

.....

**γ)** Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.



- δ)** Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 € πάγιο το μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής  $y$  με την προσθήκη και των 10 €.

|                            |   |   |   |    |    |    |
|----------------------------|---|---|---|----|----|----|
| Χρόνος ομιλίας $x$         | 0 | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Ποσό πληρωμής ομιλίας      |   |   |   |    |    |    |
| Πάγιο                      |   |   |   |    |    |    |
| Συνολικό ποσό πληρωμής $y$ |   |   |   |    |    |    |

- ε)** Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής  $y$  ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας  $x$ .

.....  
 .....

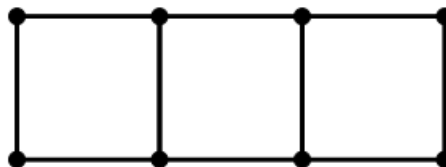
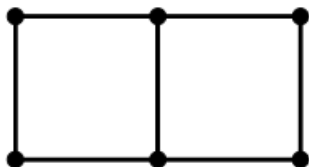
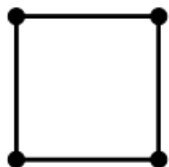
- στ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων (βλ. ερώτημα γ).

- ζ)** Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

### 3η Πρόταση Σχεδίου Διδασκαλίας

3.1. Χρησιμοποιώντας σπέρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κ.ο.κ.



α) Να βρείτε πόσα σπέρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπέρτων) σε ένα σύστημα αξόνων



**3.2.** Για λόγους υγείας, οι άνθρωποι θα πρέπει να περιορίζουν τις δυνάμεις τους, για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της άθλησης, ώστε να μην υπερβούν μια συγκεκριμένη συχνότητα καρδιακών παλμών. Για χρόνια, η σχέση ανάμεσα στην προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών ενός ατόμου και στην ηλικία του, περιγραφόταν με τον τύπο:

$$\text{Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών} = 220 - \text{ηλικία.}$$

Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ο τύπος αυτός θα έπρεπε να τροποποιηθεί λίγο. Ο καινούριος τύπος είναι ο ακόλουθος:

$$\text{Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών} = 208 - 0,7 \cdot \text{ηλικία}$$

**α)** Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει «Λόγω της χρήσης του νέου τύπου αντί του παλιού, ο μέγιστος αριθμός που προτείνεται για τους καρδιακούς παλμούς ανά λεπτό, μειώνεται λίγο για τους νέους ανθρώπους και αυξάνεται λίγο για τους ηλικιωμένους».

Από ποια ηλικία και μετά αυξάνεται η προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών λόγω χρήσης του νέου τύπου; Να περιγράψετε τον τρόπο σκέψης σας.

**β)** Ο τύπος της Προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας καρδιακών παλμών χρησιμοποιείται, επίσης, για να εκτιμηθεί πότε η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική. Έρευνες έχουν δείξει ότι η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική, όταν οι καρδιακοί παλμοί φθάσουν στο 80% της προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας, Να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει τη συχνότητα καρδιακών παλμών, ως συνάρτηση της ηλικίας, για να είναι η σωματική άσκηση πιο αποτελεσματική.

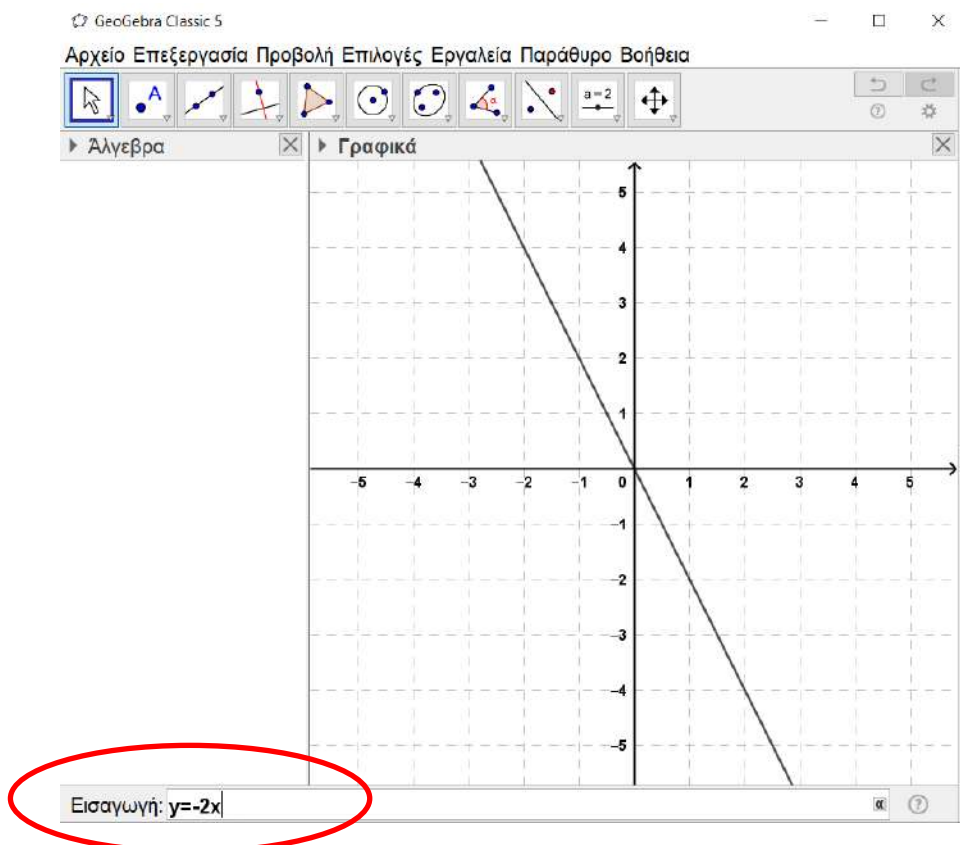
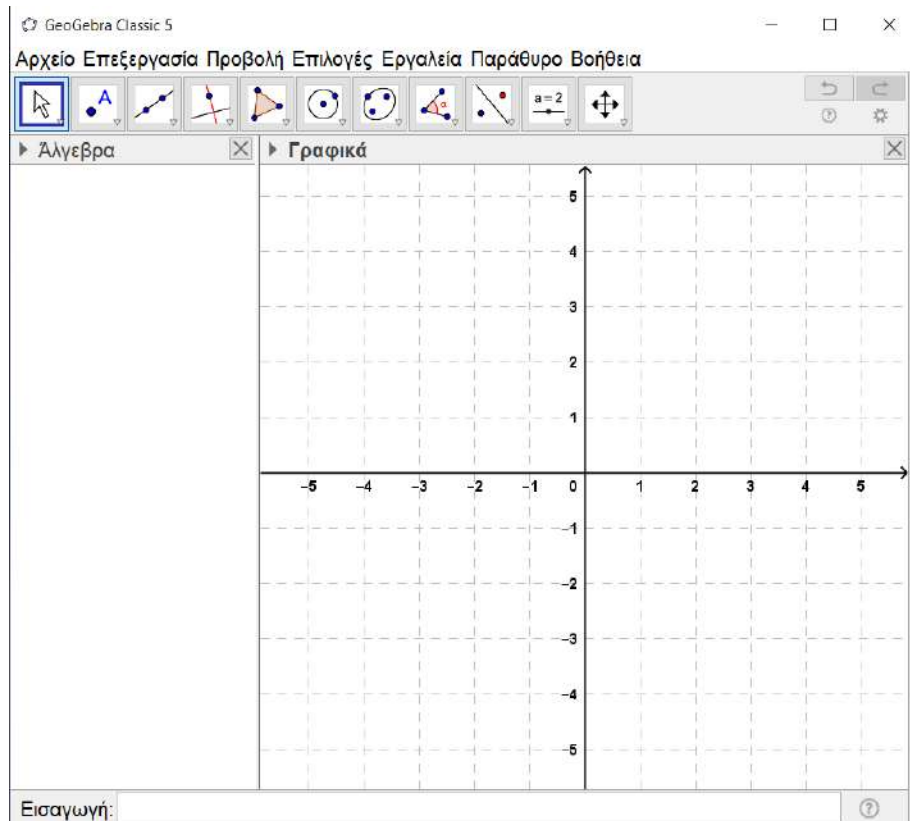
PISA 2003

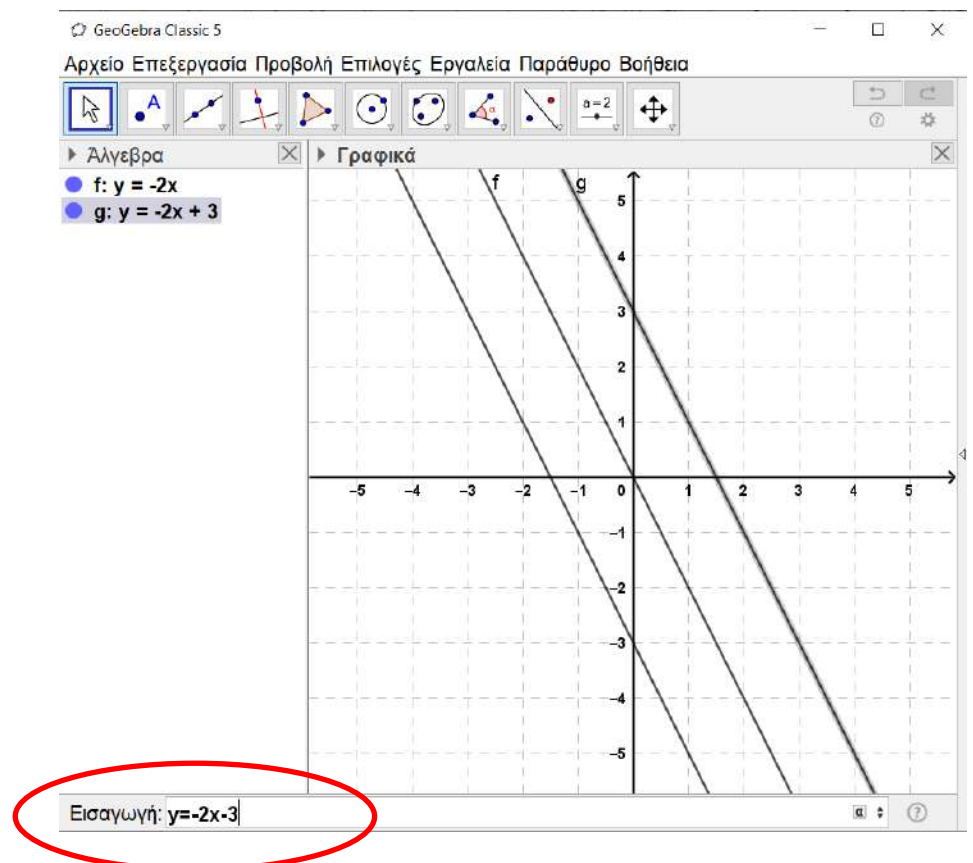
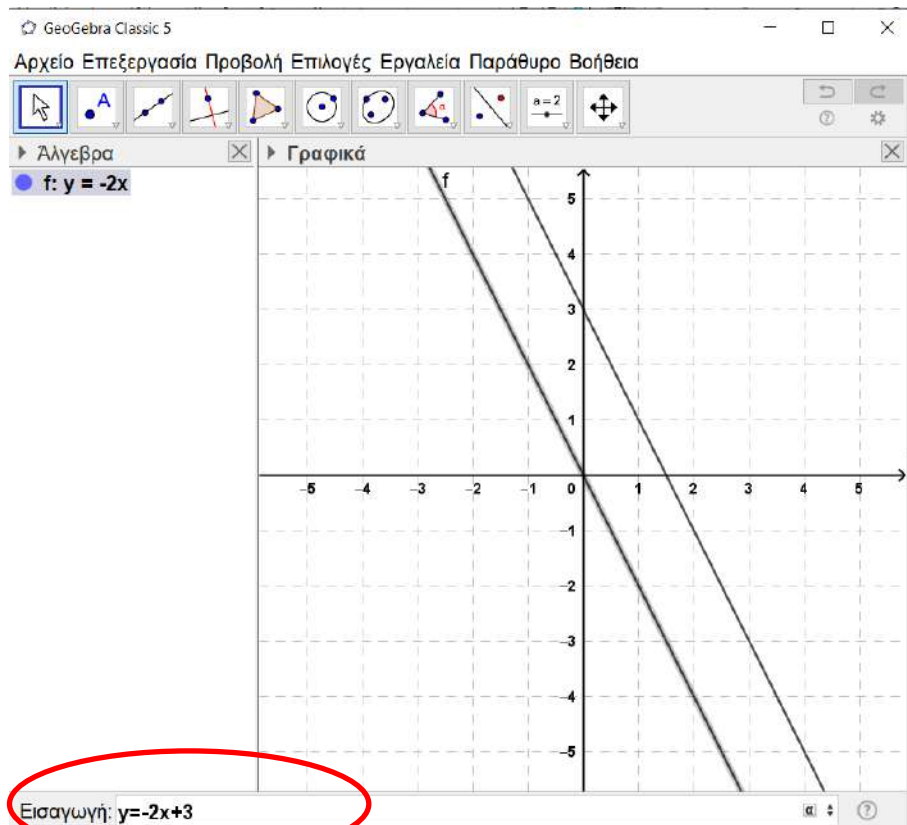


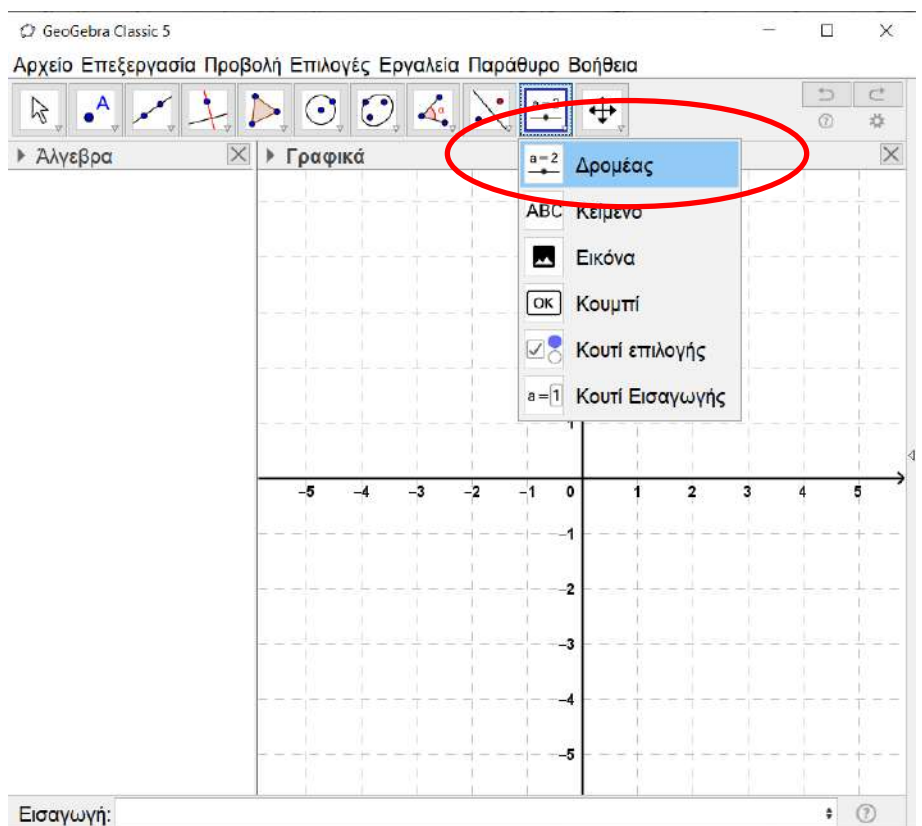
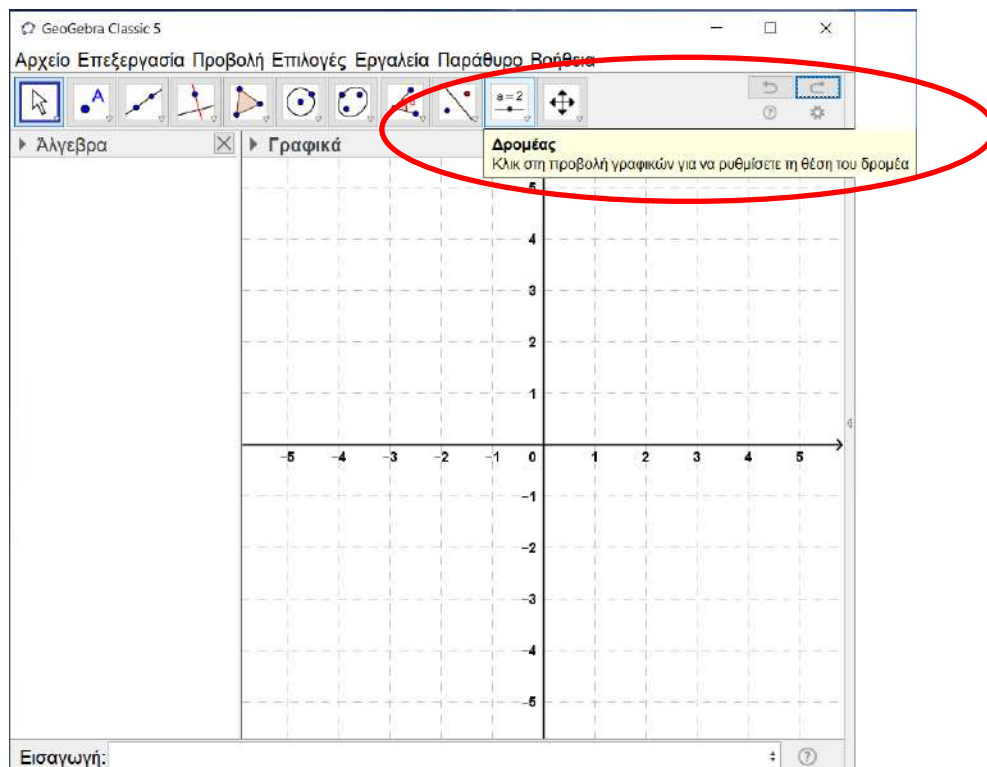


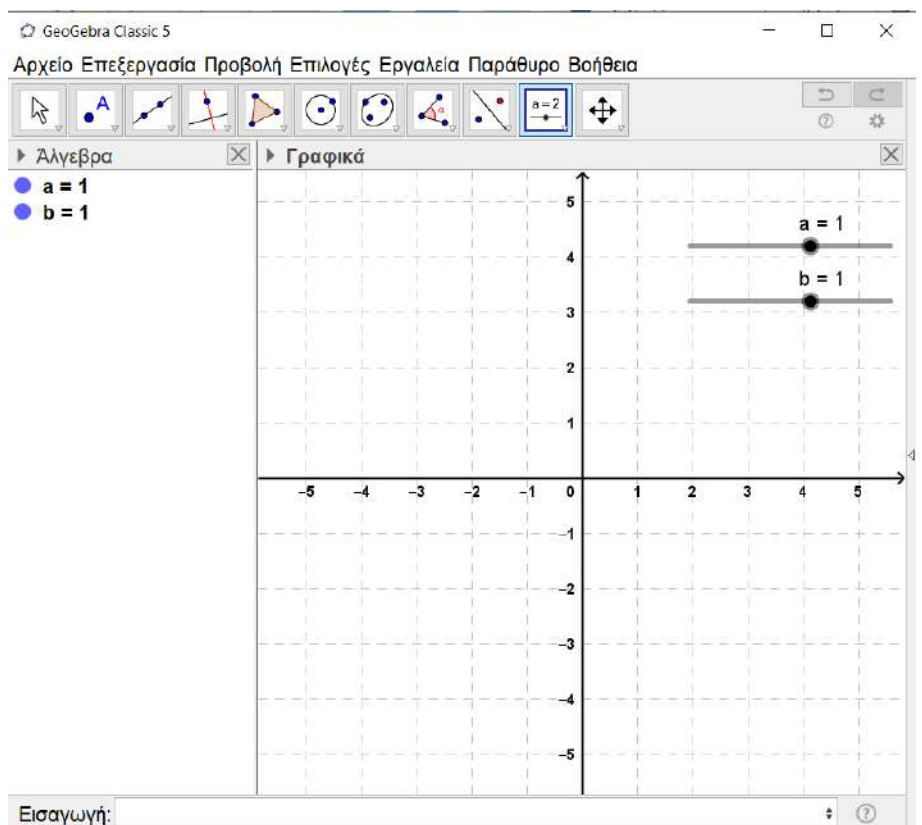
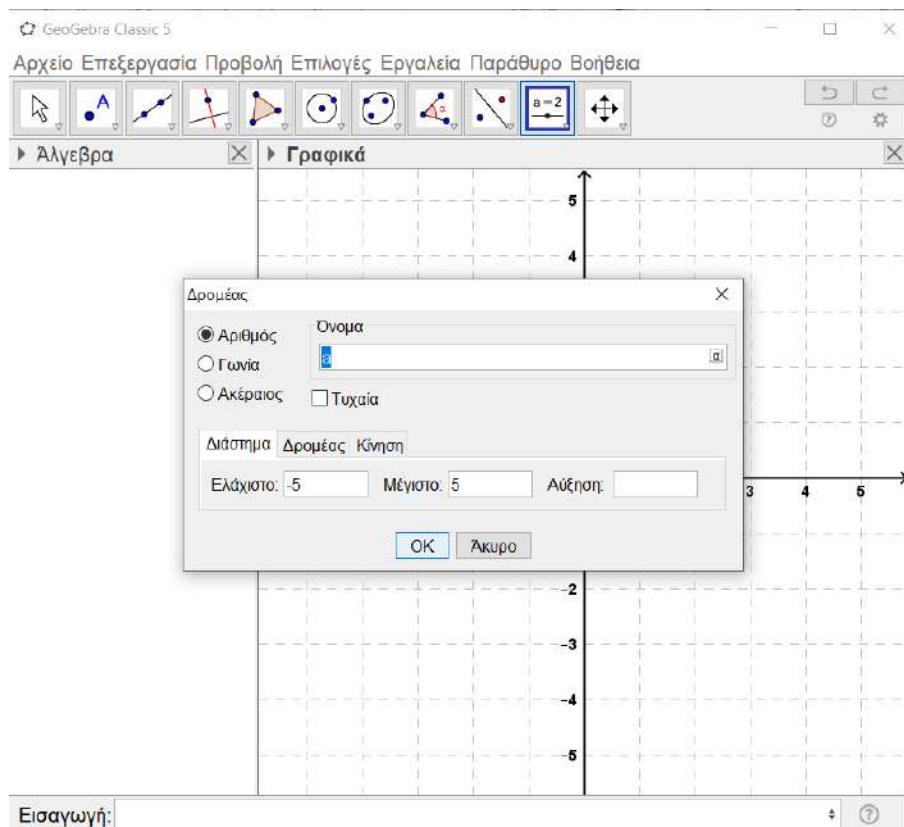
(Ποιος, πώς, πού, πόσο, πότε και γιατί);

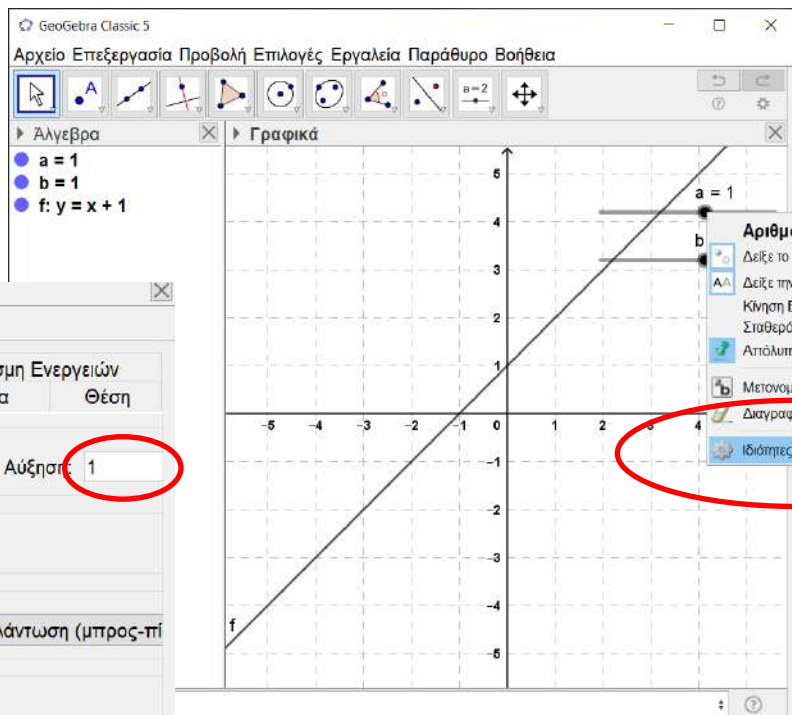
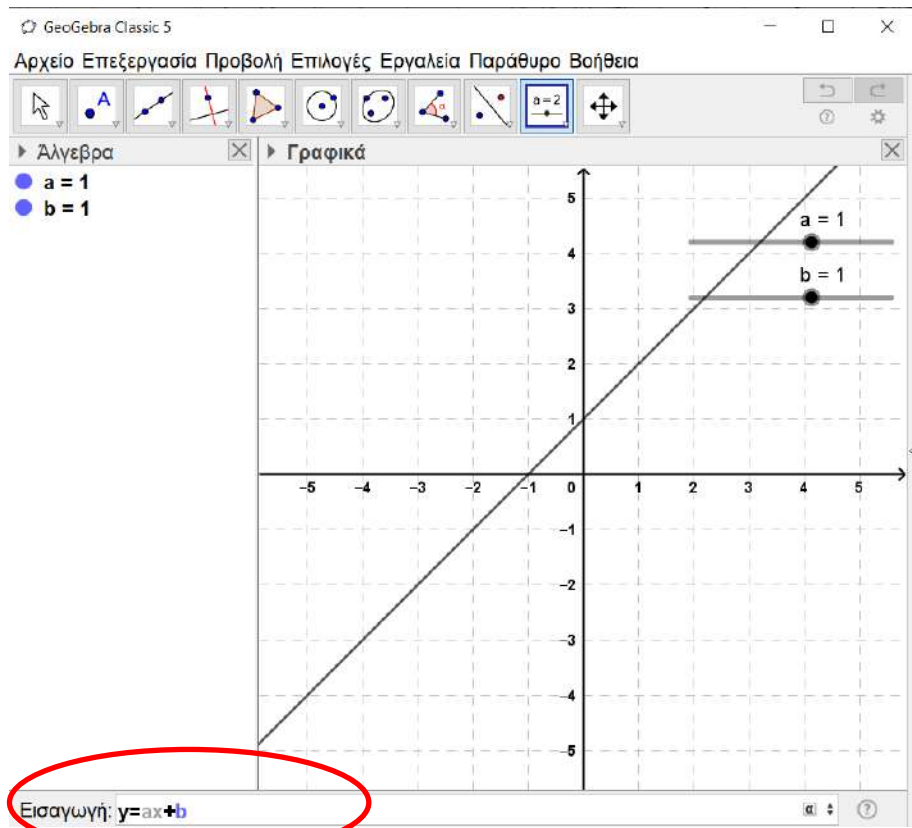
### Σύντομη παρουσίαση ορισμένων δυνατοτήτων για την έννοια της συνάρτησης





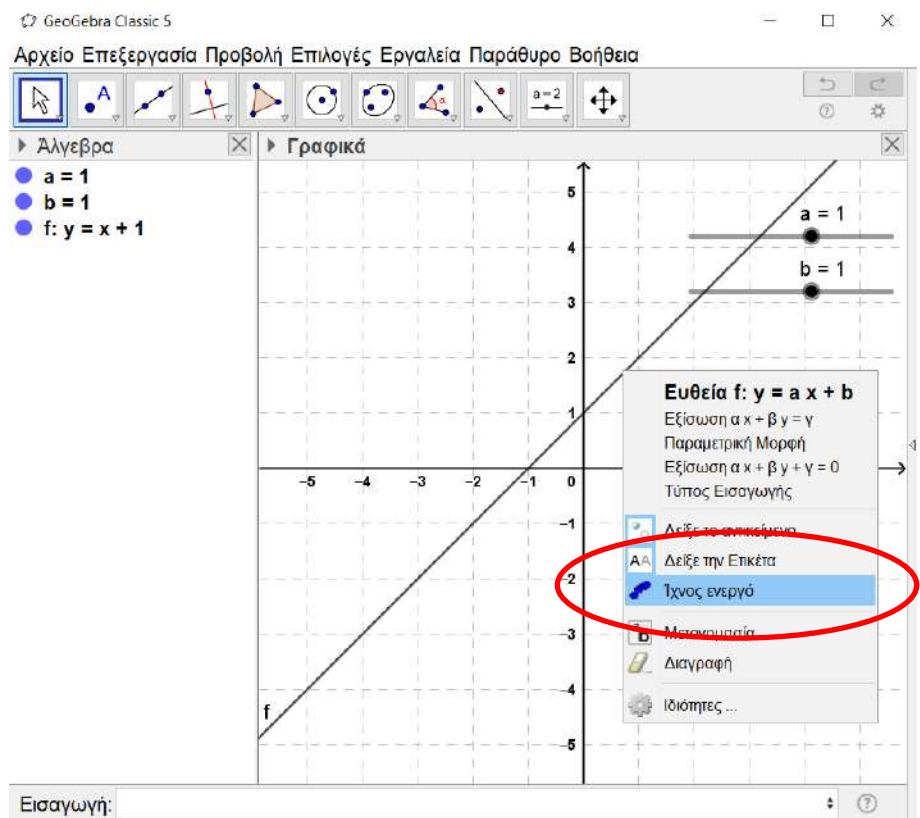


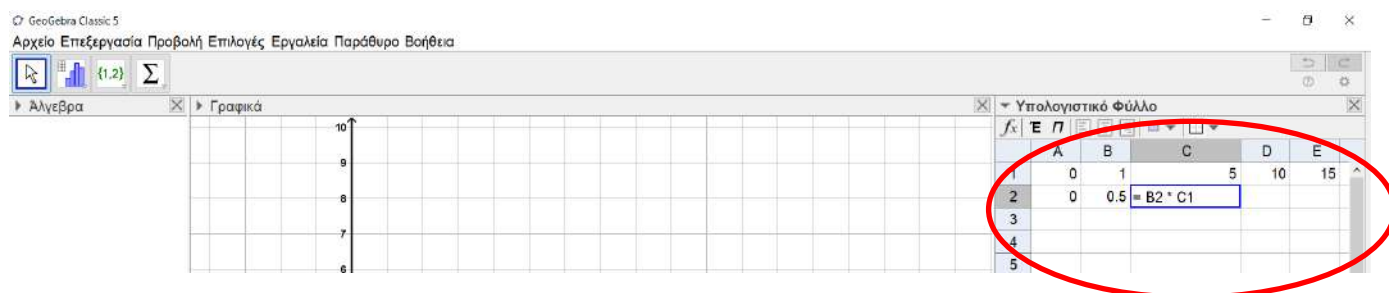
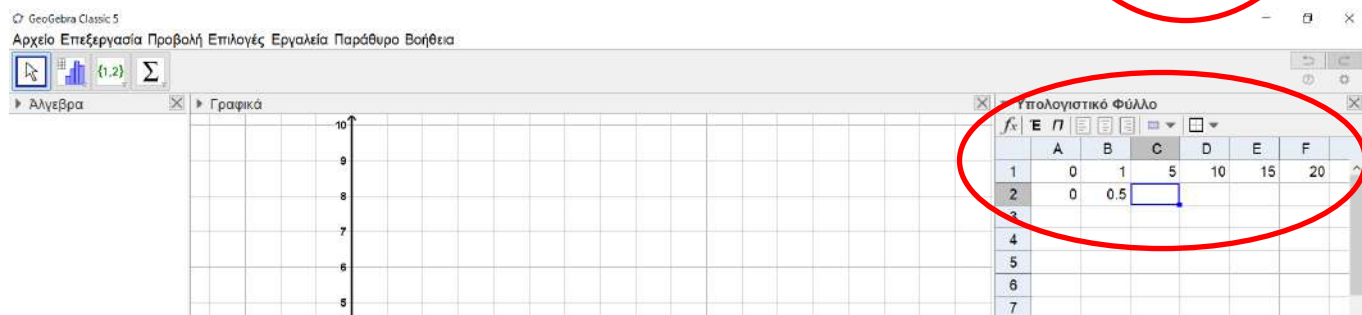
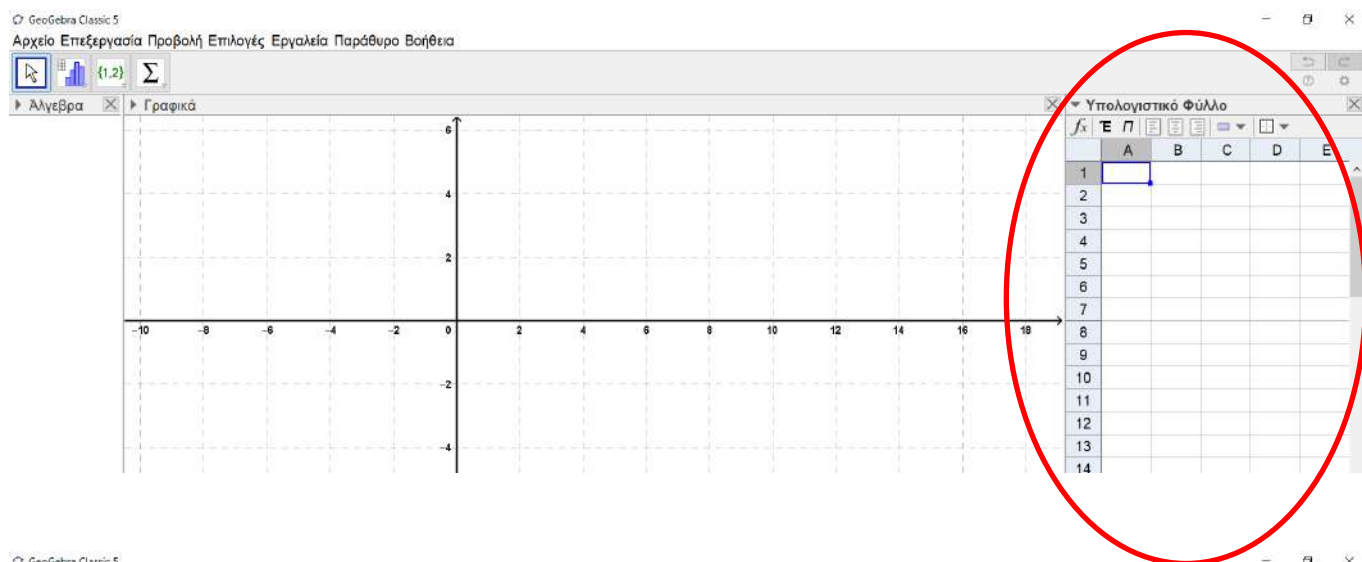
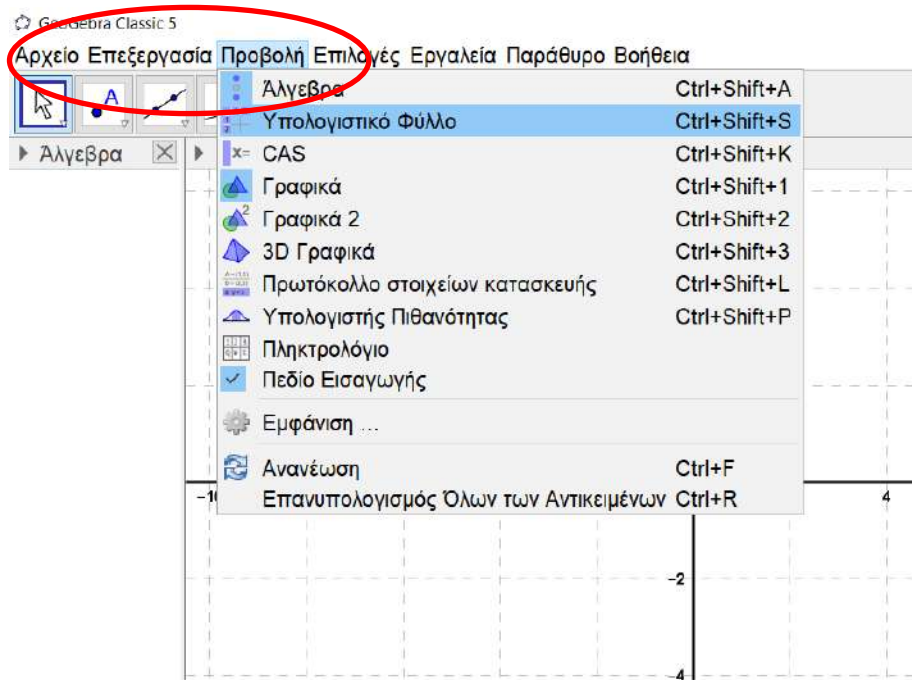




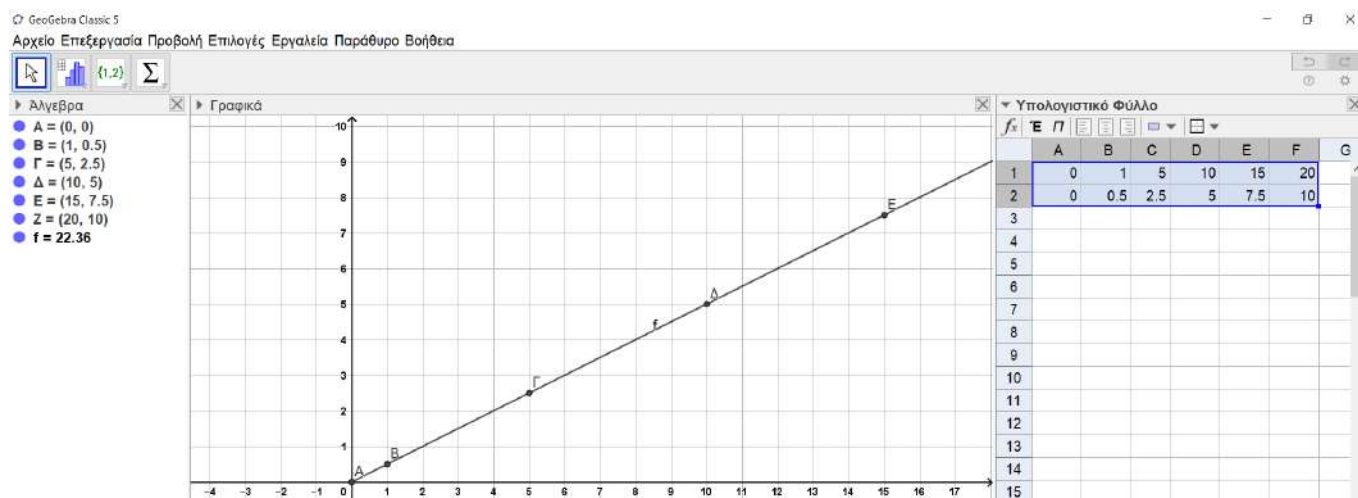
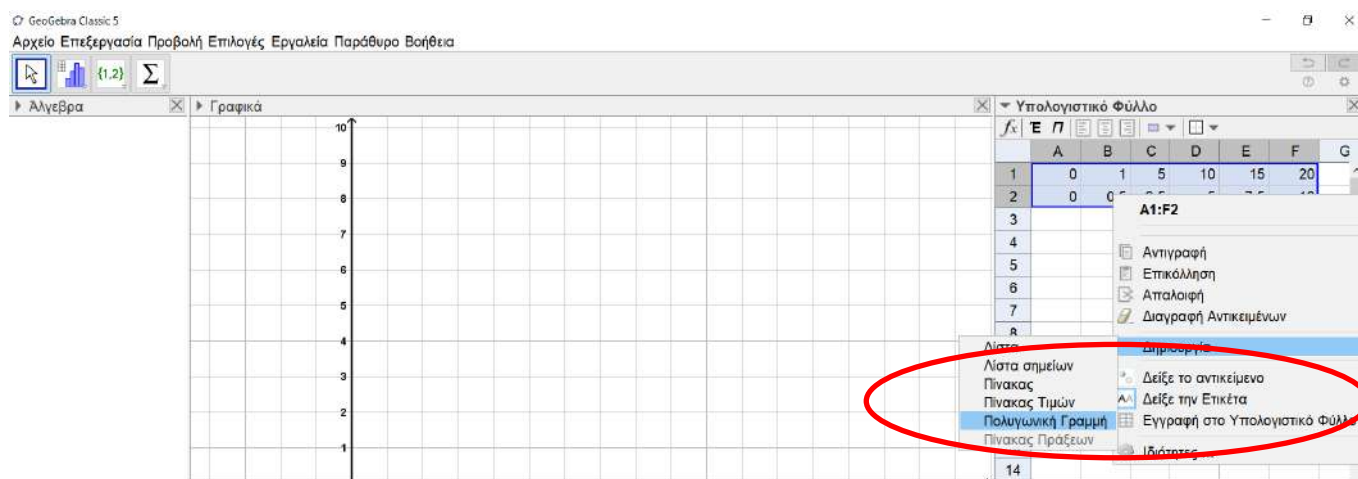
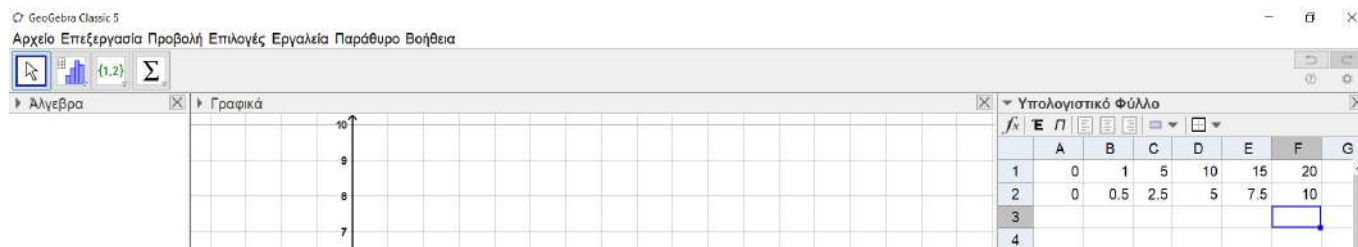
Ιδιότητες - Αριθμός a

| Αλγεβρα   | Προχωρημένες | Δέσμη Ενεργειών |
|---|--------------|-----------------|
| Βασικά  | Δρομέας      | Χρώμα           |
| <p>Διάστημα</p> <p>Ελάχιστο: -5    Μέγιστο: 5    Αύξηση: 1</p> <p>Δρομέας</p> <p><input type="checkbox"/> Σταθερό   <input type="checkbox"/> Τυχαία   <input type="checkbox"/> Οριζόντια</p> <p>Κίνηση</p> <p>Ταχύτητα: 1    Επανάληψη: <input type="checkbox"/> Με ταλάντωση (μπρος-πί</p> <p>Στυλ Σημείου</p> <p>Μέγεθος: 5 px</p> <p>Χρώμα: <span style="background-color: black; color: black;"> </span></p> <p>Στυλ γραμμής</p> <p>Πλάτος: 200 px</p> <p>Λεπτή γραμμή: 5 px</p> <p>Χρώμα: <span style="background-color: gray; color: gray;"> </span></p> <p>Διαφάνεια Ευθείας: 0 25 50 75 100</p> |              |                 |



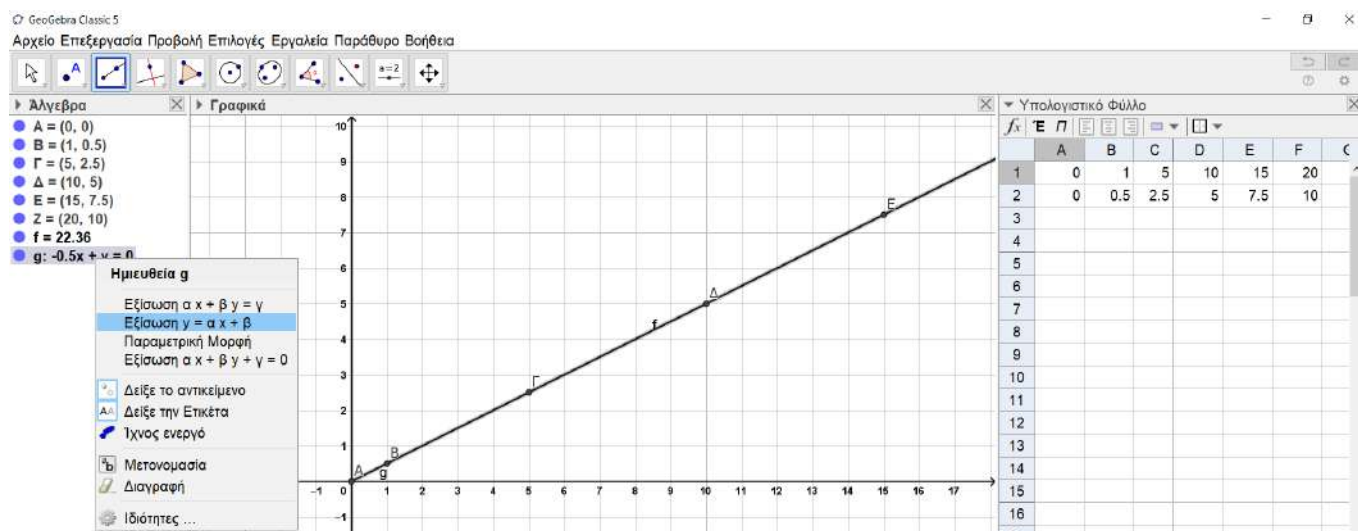
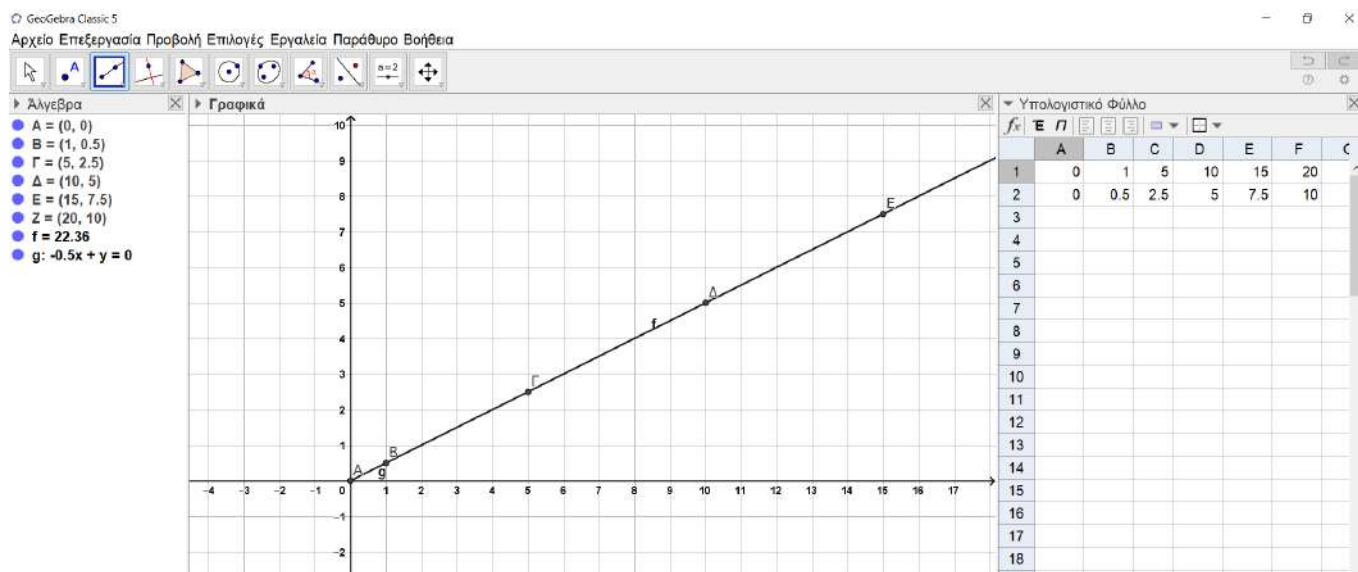
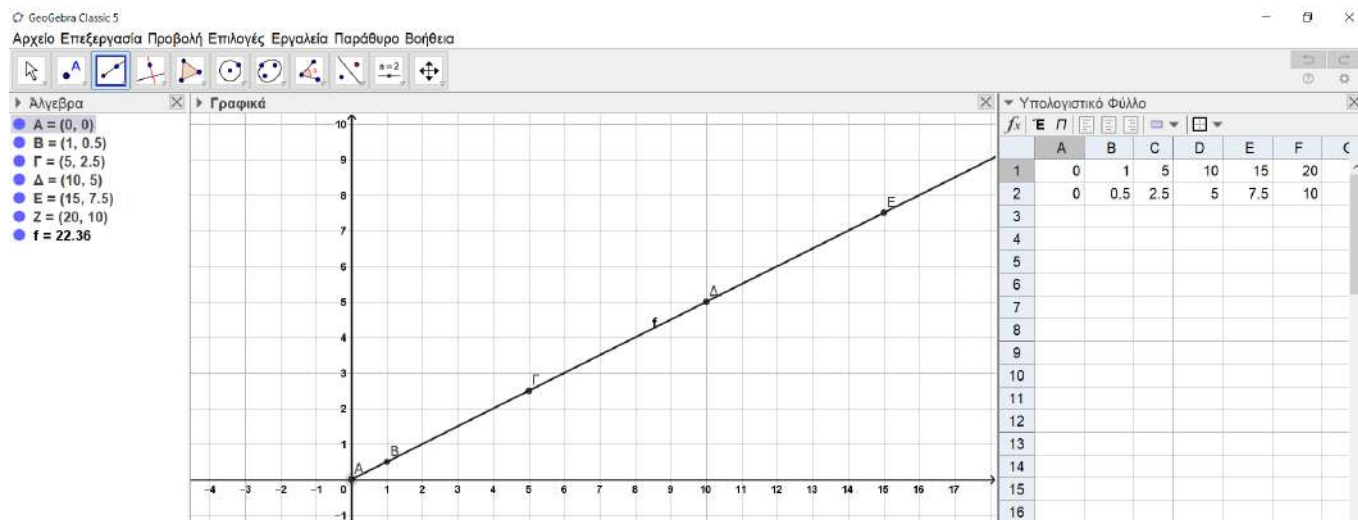


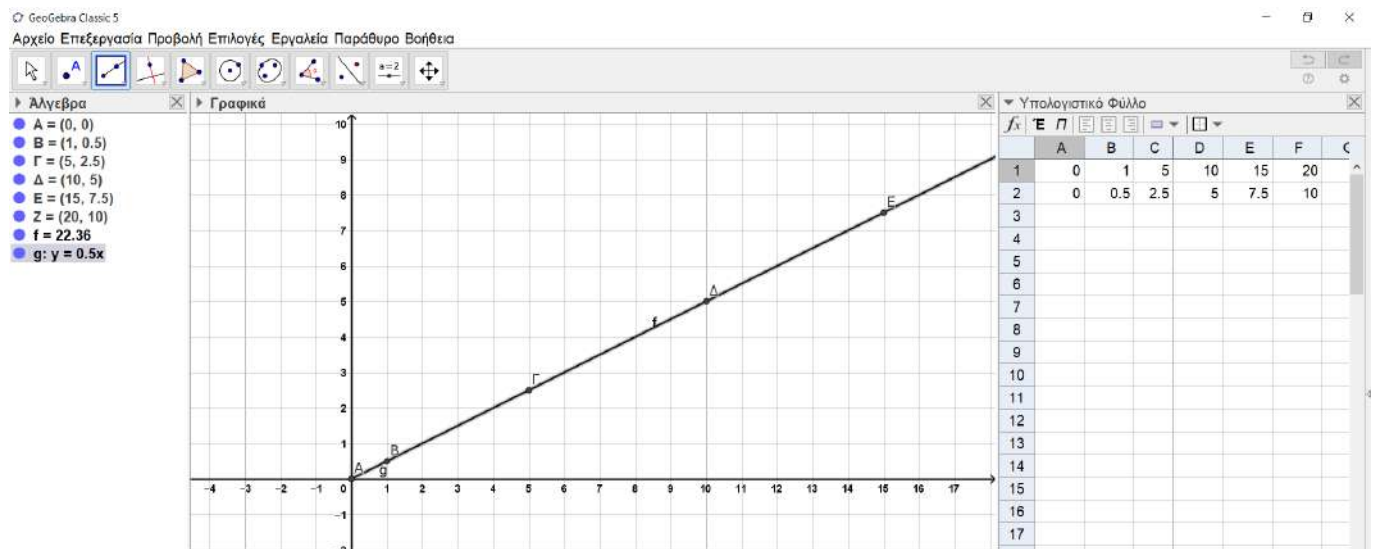
# GeoGebra, Σύντομη παρουσίαση ορισμένων δυνατοτήτων για την έννοια της συνάρτησης











Eισαγωγή:  $h(x) = Av(0 \leq x, 0.5x + 10)$