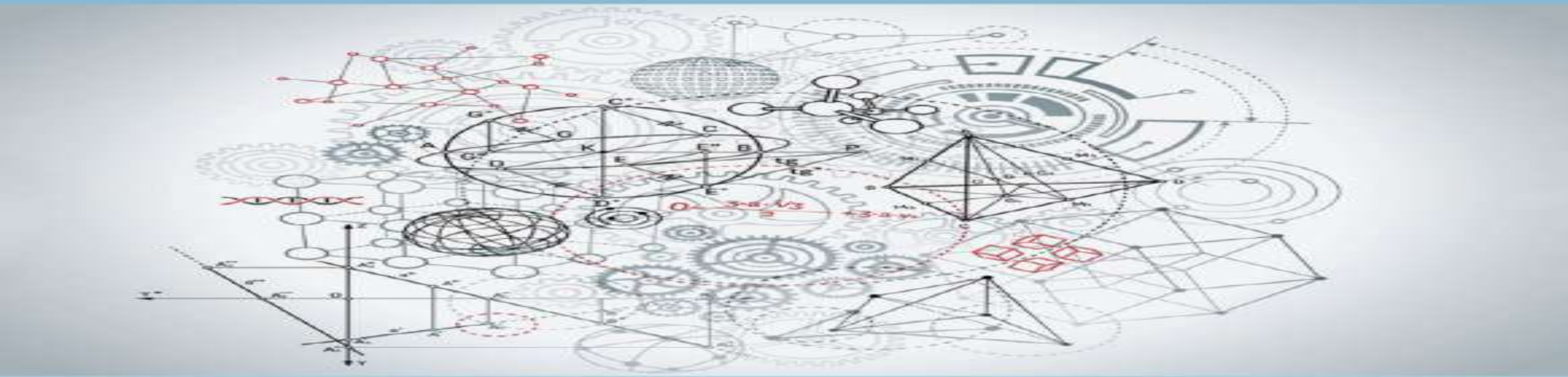
Καλαμαρί
ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ



1ο Μαθηματικό Βιωματικό Εργαστήρι

Άτυπη και τυπική αποδεικτική διαδικασία στα Μαθηματικά

Μαριάννα Τζεκάκη[1] και Μαρία Παπαγεωργίου[2]

[1]Ομότιμη Καθηγήτρια Διδακτικής Μαθηματικών, Α.Π.Θ, tzekaki@auth.gr
[2] Καθηγήτρια Μαθηματικών Μ.Ε., Master Διδακτικής των Μαθηματικών, mardpap@yahoo.gr

Δραστηριότητα 1

- Στο θεώρημα του αθροίσματος γωνιών τριγώνου: «*Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{o}*»,
  - δοκιμάστε να προτείνετε άτυπες αποδείξεις που αναδεικνύουν τα βασικά στοιχεία του θεωρήματος
  - συνδέσετε με τις πιο τυπικές αποδείξεις.

Δραστηριότητα 1

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος σε κάθε επίπεδο;
5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από κατάλληλες δραστηριότητες;

Δραστηριότητα 1

- Το άθροισμα δεν είνα απλά μια άθροιση γωνιών, είναι μια **σταθερή ιδιότητα:** το αναλλοίωτο του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου (που οδηγεί και σε άλλα σταθερά αθροίσματα)
- Ο διδακτικός στόχος είναι το πέρασμα από την άθροιση γωνιών, στο σταθερό άθροισμα.

ΆΡΑ

- Να συγκρίνουν και να μετρήσουν σε διάφορα είδη τριγώνων και γωνιών.
- Να περάσουν από το άθροισμα στη συμμεταβολή, στο αναλλοίωτο- γνωστική αντίθεση- και τη γενίκευση.

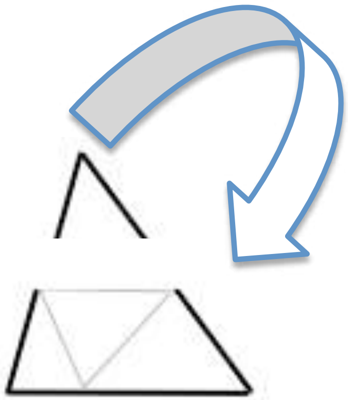
Δραστηριότητα 1

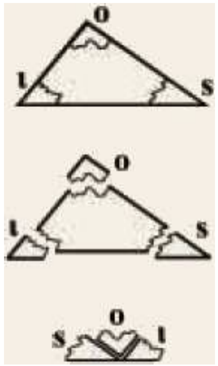
Πρώτες Δράσεις

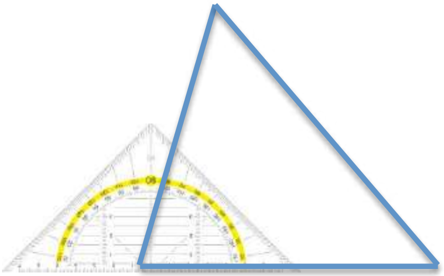
- Κόψιμο γωνιών και τοποθέτηση τη μία μετά την άλλη.
- Χρηση διαφανούς και τοποθέτηση.
- Δίπλωση γωνιών και σχηματισμός.
- Μέτρηση με μοιρογνωμόνιο και άθροισμα.

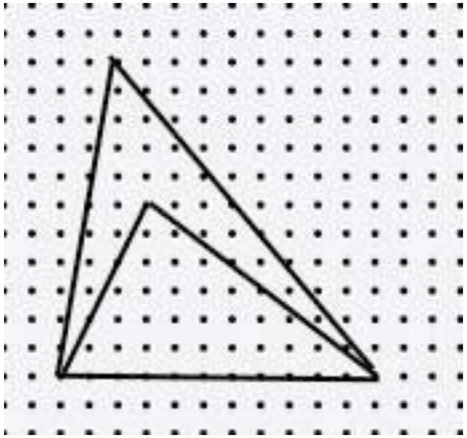
Όλα αυτά επιτείνουν την αθροιστική αντίληψη, αλλά για συμμεταβολή

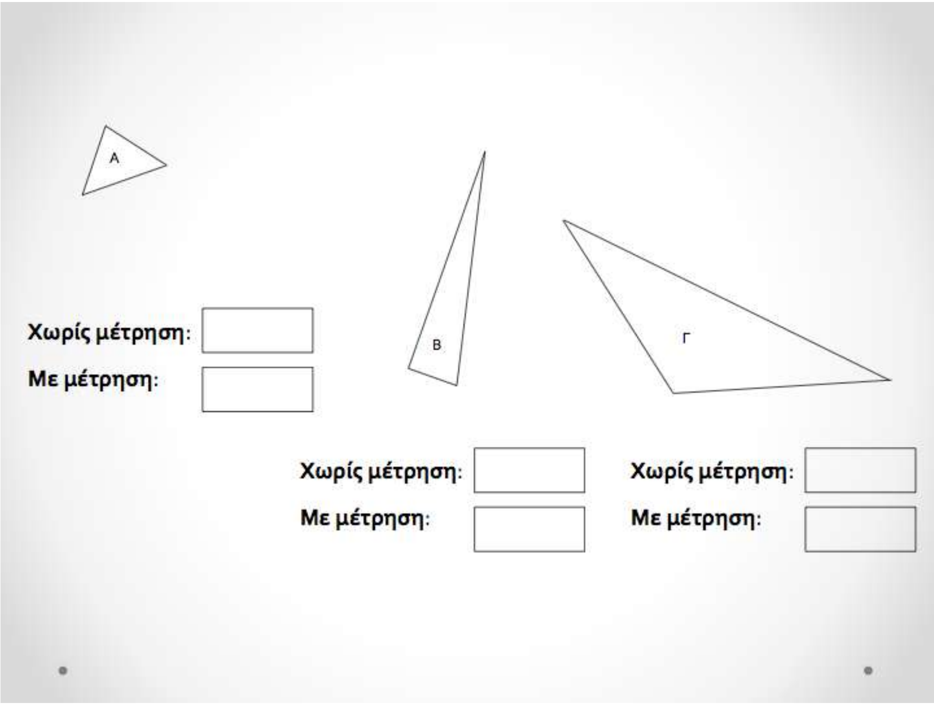
- *Γεωπλάνο*
- *Επικέντρωση προσοχής, τρίγωνο με 2 οξείες, με δύο αμβλείες, με δύο ορθές;*







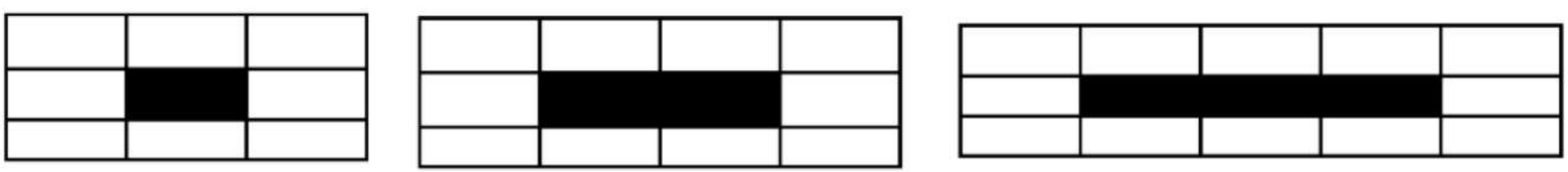



A
B
Γ
Χωρίς μέτρηση:
Με μέτρηση:
Χωρίς μέτρηση:
Με μέτρηση:
Χωρίς μέτρηση:
Με μέτρηση:

Δραστηριότητα 2

- Στο παρακάτω πρόβλημα με μορφή κανονικότητας (pattern) δοκιμάστε να
  - προτείνετε λύσεις που γενικεύονται άτυπα και
  - συνδέσετε με μια πιο τυπική μαθηματική γενίκευση.

Μια αυλή είναι στρωμένη με μαύρες και άσπρες πλάκες με το ακόλουθο μοτίβο:



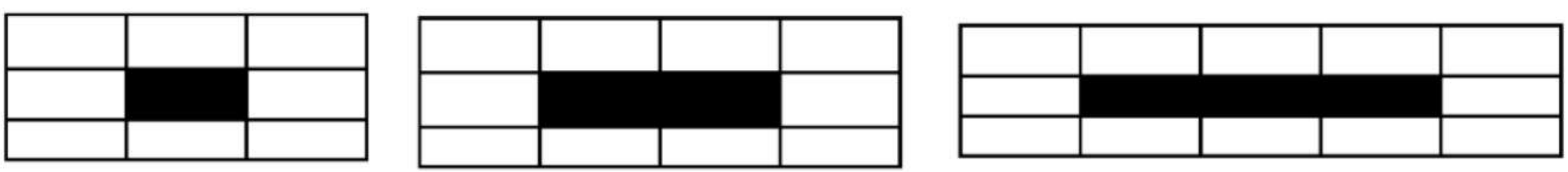
Δοκιμάστε να βρείτε πόσες άσπρες πλάκες έχει μια αυλή όπου στο κεντρικό μέρος έχει 10 μαύρες πλάκες ή έχει 50 μαύρες πλάκες; Πόσες άσπρες έχουμε με ν μαύρες πλάκες;

Δραστηριότητα 2

- (άτυπη) $6 + 2,\ 6 + 2.2,\ 6 + 2.3,\ \ldots,\ 6 + 2.\nu$

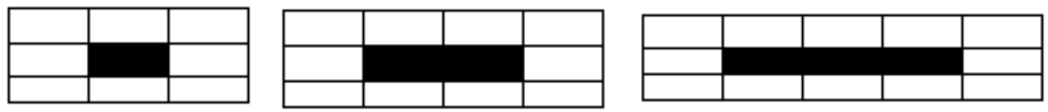
- (με επαγωγή) για το $\nu+1$ μπαίνουν 2 πλάκες, άρα
  $6 + 2\nu + 2 = 6 + 2(\nu+1)$, ισχύει για κάθε ν

Μια αυλή είναι στρωμένη με μαύρες και άσπρες πλάκες με το ακόλουθο μοτίβο:



Δοκιμάστε να βρείτε πόσες άσπρες πλάκες έχει μια αυλή όπου στο κεντρικό μέρος έχει 10 μαύρες πλάκες ή έχει 50 μαύρες πλάκες; Πόσες άσπρες έχουμε με ν μαύρες πλάκες;

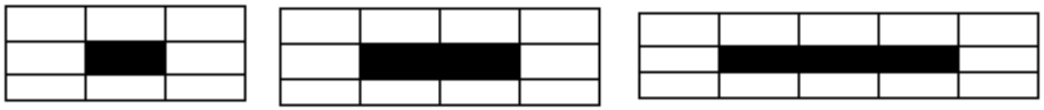
Δραστηριότητα 2
$1^{η}$ άτυπη



- κάθε σχήμα προκύπτει από το προηγούμενο με πρόσθεση μίας στήλης όμοια με την $2^{η}$ στήλη του $1^{ου}$ σχήματος

Αριθμός σχήματος	άσπρες στις ακραίες στήλες	Αριθμός στηλών με μαύρη πλάκα	Συνολικός αριθμός μαύρων πλακών	Αριθμός άσπρων πλακών που προστίθενται	Συνολικός αριθμός άσπρων πλακών
$1^{ο}$	6	1	1	2	6+2
$2^{ο}$	6	2	2	$2 \cdot 2$	$6 + 2 \cdot 2$
$3^{ο}$	6	3	3	$3 \cdot 2$	$6 + 3 \cdot 2$
…	…		…		…
…	…		…		…
$ν^{ο}$	6	ν	ν	$\nu \cdot 2$	$6 + (\nu \cdot 2)$

Δραστηριότητα 2
Τυπική – μαθηματική επαγωγή



- Για ν=1: 2.1+6=8 άσπρες, άρα P(1)αληθής.
- Έστω P(ν) αληθής οπότε, στο ν είναι P(ν) =2ν+6 *(1)*
- P(ν+1) αληθής; δηλ., α=2(ν+1)+6 ; (2)
- Το ν+1 σχήμα προκύπτει από το ν σχήμα αν προσθέσω μία στήλη με 2 άσπρες και 1 μαύρη πλάκα, άρα η *(1)* δίνει: α=2ν+6+2=2(ν+1)+6, ισχύει η (2).
- Άρα η πρόταση P(ν) αληθής για κάθε ν>1

Δραστηριότητα 2

- Ποιά προσέγγιση κάνουν οι μαθητές,

  $6 + 2.\nu$

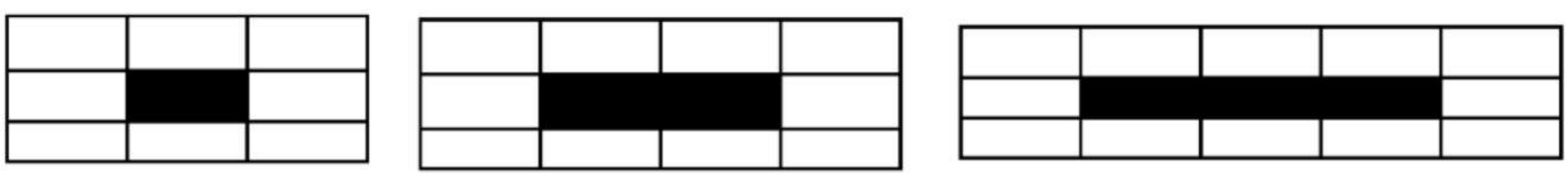
  $8 + 2(\nu-1)$

  $3 + \nu + \nu + 3$

  $2 + 2(\nu+2)$

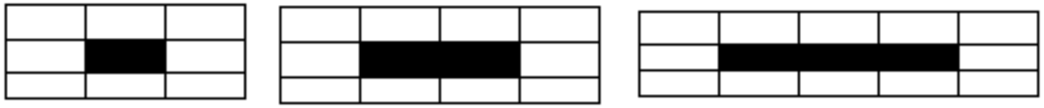
  $3(\nu+2) - \nu$

Μια αυλή είναι στρωμένη με μαύρες και άσπρες πλάκες με το ακόλουθο μοτίβο:



Δοκιμάστε να βρείτε πόσες άσπρες πλάκες έχει μια αυλή όπου στο κεντρικό μέρος έχει 10 μαύρες πλάκες ή έχει 50 μαύρες πλάκες; Πόσες άσπρες έχουμε με ν μαύρες πλάκες;

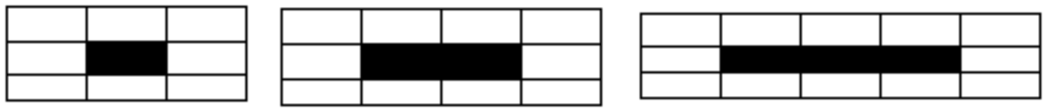
Δραστηριότητα 2
$2^η$ άτυπη



- γεωμετρικά –εμβαδά- εμβαδόν εξωτερικού ορθογωνίου- εμβαδόν ορθογωνίου που σχηματίζουν οι μαύρες πλάκες

Αριθμός σχήματος	Ορθογώνιο διαστάσεων	Αριθμός μαύρων πλακών	Αριθμός άσπρων πλακών
1^o	3,3	1	$3 \cdot 3 - 1$
2^o	3,4	2	$3 \cdot 4 - 2$
3^o	3,5	3	$3 \cdot 5 - 3$
…	…	…	…
…	…	…	…
$ν^o$	3,ν+2	ν	$3 \cdot (\nu + 2) - \nu$

Δραστηριότητα 2
$3^{η}$ άτυπη



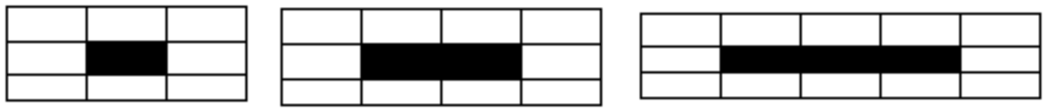
- κατά γραμμές

  $1^{η}$-$3^{η}$ γραμμή πάντα άσπρες πλάκες

  η $2^{η}$ γραμμή έχει πάντα 2 άσπρες πλάκες στα άκρα

Αριθμός σχήματος	Αριθμός μαύρων πλακών	Μεσαία γραμμή	$1^{η}$ -$3^{η}$ γραμμή	Αριθμός άσπρων πλακών
$1^{ο}$	1	2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 + 2$
$2^{ο}$	2	2	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 4 + 2$
$3^{ο}$	3	2	$2 \cdot 5$	$3 \cdot 5 + 2$
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
$ν^{ο}$	ν	2	$2 \cdot (\nu + 2)$	$2 \cdot (\nu + 2) + 2$

Δραστηριότητα 2
$4^{η}$ άτυπη

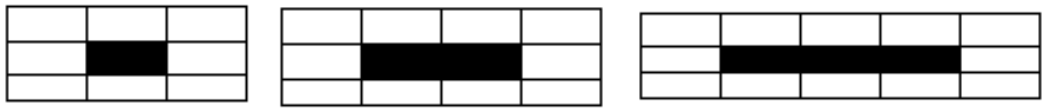


- 1ο σχήμα 3 άσπρες +μία άσπρη πάνω από κάθε μαύρη+μία άσπρη κάτω από κάθε μαύρη + 3 άσπρες

Αριθμός σχήματος	Αριθμός μαύρων Πλακών	1η στήλη	Αριθμός άσπρων πλακών στις ενδιάμεσες στήλες	Τελ/α στήλη	Αριθμός άσπρων πλακών
$1^{ο}$	1	3	1 πάνω+1 κάτω	3	$3+1+1+3$
$2^{ο}$	2	3	2 πάνω+2 κάτω	3	3+2+2+3
$3^{ο}$	3	3	3 πάνω+3 κάτω	3	3+3+3+3
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
$ν^{ο}$	ν	3	ν πάνω + ν κάτω	3	$3+ν+ν+3$

Δραστηριότητα 2

5^{η} άτυπη

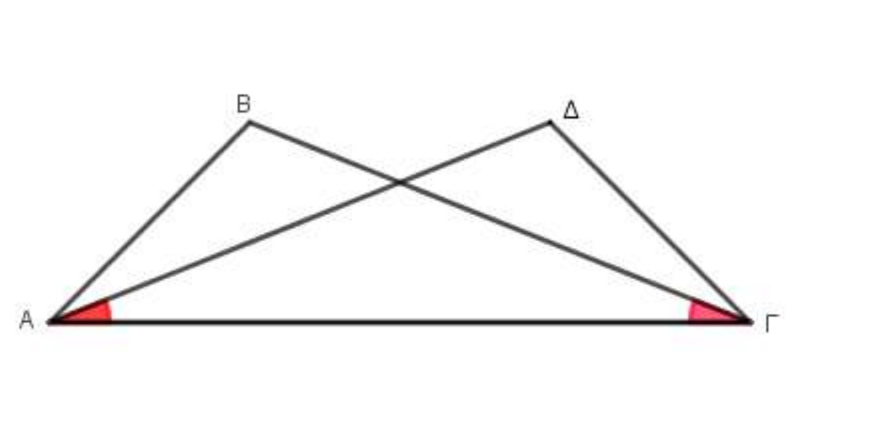


- Αριθμός άσπρων ανά σχήμα

	Σύνολο άσπρων
Στο 1^{ο} σχήμα έχουμε 8 άσπρες	8
Στο 2^{ο} σχήμα έχουμε 8 άσπρες και 1 νέα στήλη με 2 άσπρες	$8+1\cdot 2$
Στο 3^{ο} σχήμα έχουμε 8 άσπρες και 2 νέα στήλες με 2 άσπρες	$8+2\cdot 2$
Στο 4^{ο} σχήμα έχουμε 8 άσπρες και 3 νέες στήλη με 2 άσπρες	$8+3\cdot 2$
…	…
…	…
Στο ν^{ο} σχήμα έχουμε 8 άσπρες και ν-1 νέες στήλη με 2 άσπρες	$8+(\nu-1)\cdot 2$

Δραστηριότητα 3

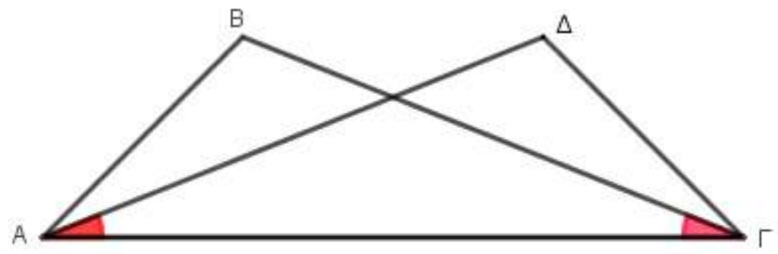
- Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ έχουν ΑΒ=ΔΓ, ΒΓ κοινή και *γωνίες ΒΓΑ=ΔΑΓ.* Δοκιμάστε να προτείνετε
  - άτυπες αποδείξεις που αναδεικνύουν την ισότητα των δύο τριγώνων και
  - να συνδέσετε με μια πιο τυπική απόδειξη.



Δύο τρίγωνα που έχουν ίσες μία προς μία δύο πλευρές καθώς και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών, μπορεί να είναι ίσα». Μπορεί το συμπέρασμα αυτό να γενικευτεί; Προσπαθήστε να αιτιολογήστε την απάντηση σας

Δραστηριότητα 3

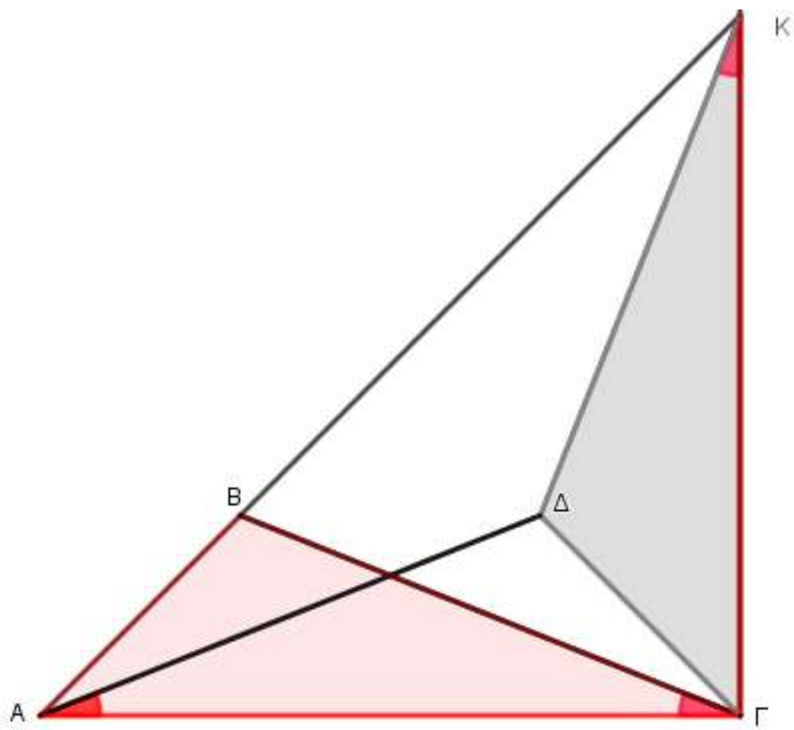
Άτυπη απόδειξη



- σχεδιασμός σε διαφανές χαρτί και μετατόπιση
- μέτρηση των πλευρών με χάρακα- χρήση κριτηρίου Π.Π.Π
- σύγκριση των πλευρών με διαβήτη- χρήση κριτηρίου Π.Π.Π

Δραστηριότητα 3

Άτυπη απόδειξη

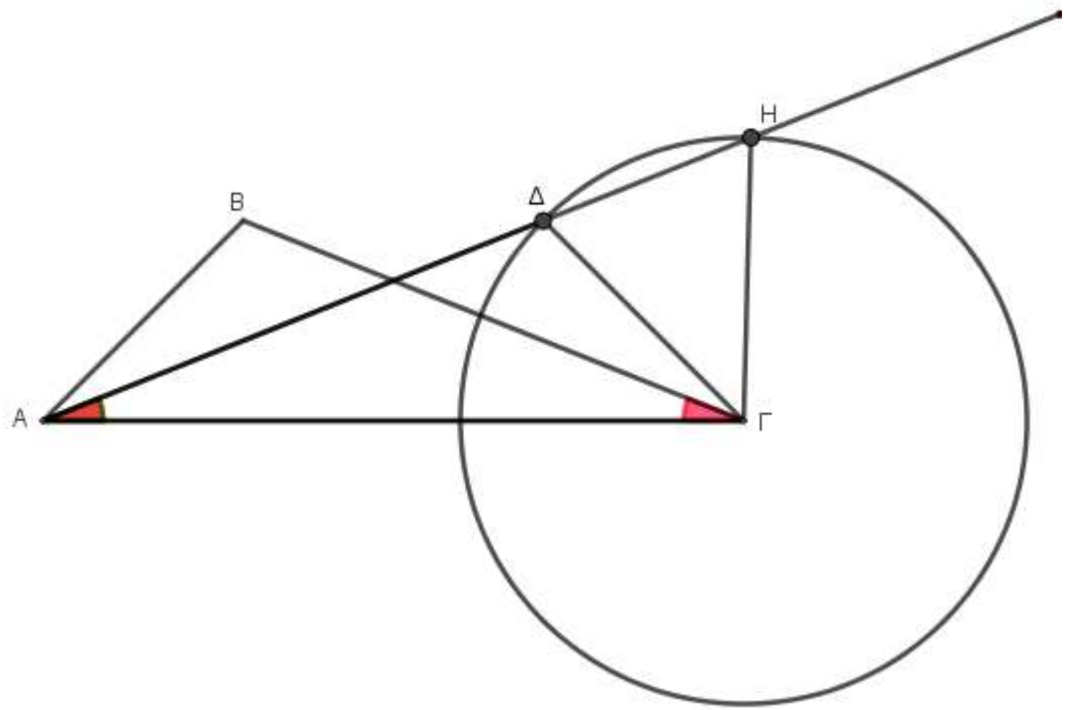


Μετατοπίζουμε το ΑΒΓ και το τοποθετούμε έτσι ώστε, η πλευρά ΑΒ να συμπέσει με την ΔΓ και η κορυφή Α να βρεθεί στη θέση Γ.
Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΚ ταυτίζονται, οπότε ΑΓ=ΓΚ άρα ΑΓΚ ισοσκελές.
Επομένως οι γωνίες ΚΑΓ, ΑΚΓ ίσες, επειδή οι γωνίες ΔΑΓ, ΔΚΓ είναι ίσες προκύπτει ότι οι γωνίες ΑΚΔ, ΔΑΚ ίσες.
Οπότε ΑΔ=ΔΚ άρα και ΑΔ=ΒΓ και τα αρχικά θα είναι ίσα από ΠΓΠ.

Δραστηριότητα 3

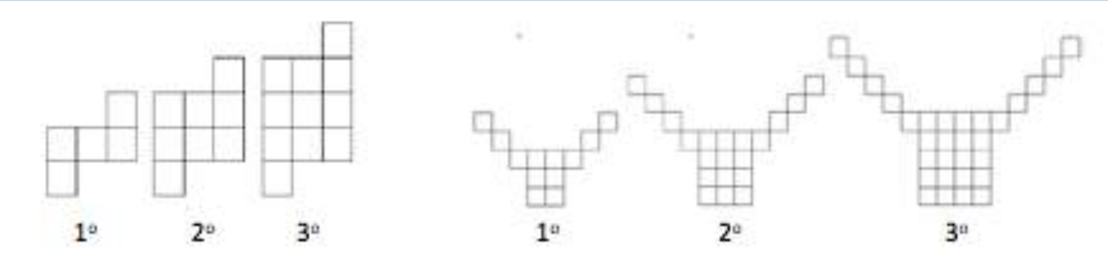
Άτυπη απόδειξη

Με κέντρο Γ και ακτίνα ΓΔ=ΑΒ γράφουμε κύκλο που τέμνει την ΑΔ στο Η. Το ΑΗΓ είναι το ζητούμενο.



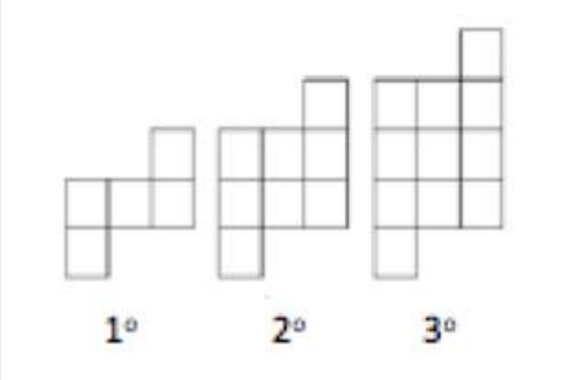
Δραστηριότητα 4

Στα σχήματα με μορφή κανονικότητας (pattern) δοκιμάστε να προτείνετε λύσεις που γενικεύονται άτυπα για ν και στη συνέχεια να συνδέσετε με μια πιο τυπική μαθηματική γενίκευση.



- Δοκιμάστε να βρείτε πόσα τετράγωνα έχουν τα σχήματα στη 10η θέση, πόσα στη 25η και πόσα στη νιοστή θέση. Συνδέστε με μια τυπική μαθηματική γενίκευση.

Δραστηριότητα 4



‘Ατυπη

- Για ν=1, 1.3 + 2
- Για ν=2, 2.3 + 2

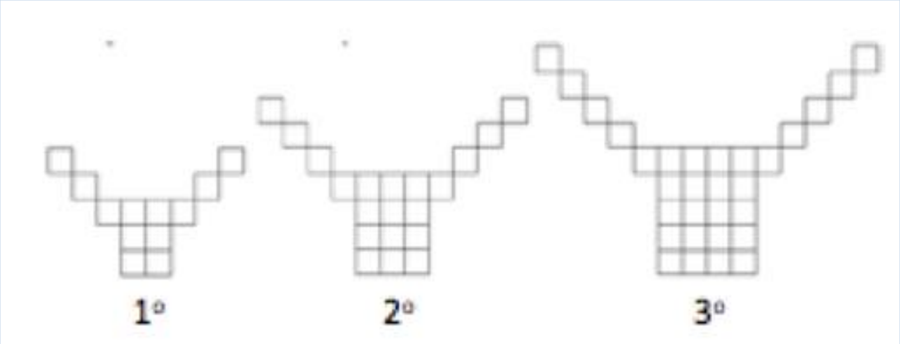
...

- Για ν , ν.3 + 2 δηλαδή τελικά 3ν+2

Τυπική

- Ισχύει P(1)
- Αν ισχύει η P(ν) = 3ν+2 ισχύει και η P(ν+1)= 3(ν+1)+2
- Βάζουμε μια σειρά με 3,
- Άρα P(ν+1)= 3ν+2 +3=3(ν+1)+2

Δραστηριότητα 4



Άτυπη

- Για ν=1, 2.3 + 2.3 = 12
- Για ν=2, 3.4 + 2.4 = 20
- Για ν=3, 4.5 + 2.5 = 30

...

- Για ν , (ν+1)(ν+2) + 2(ν+2) = (ν+2)(ν+3)

Τυπική

- Ισχύει P(1) και για P(ν)= (ν+2)(ν+3) έπεται P(ν+1)= (ν+3)(ν+4)
- Βάζουμε μια γραμμή και μία στήλη (ν+2)(ν+3) και ένα άκρο 2(ν+3)
- Τελικά P(ν+1)= (ν+2)(ν+3) + 2(ν+3) = (ν+3)(ν+4)

Δραστηριότητα 5

Για τις ιδιότητες των αριθμών

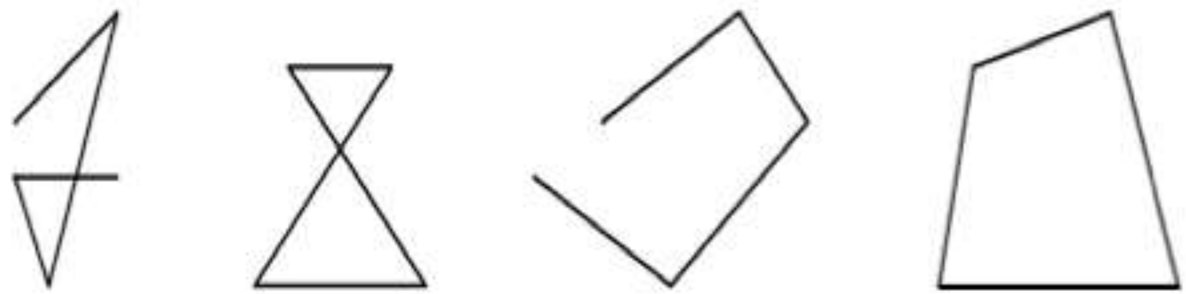
- «το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος»,
- «το άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου είναι περιττός» και «το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος»

προτείνετε άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες.

Συνδέστε με τις πιο τυπικές αποδείξεις.

Παράδειγμα

Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα "τι είναι τετράπλευρο" και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση "ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές", παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια "τετράπλευρο".

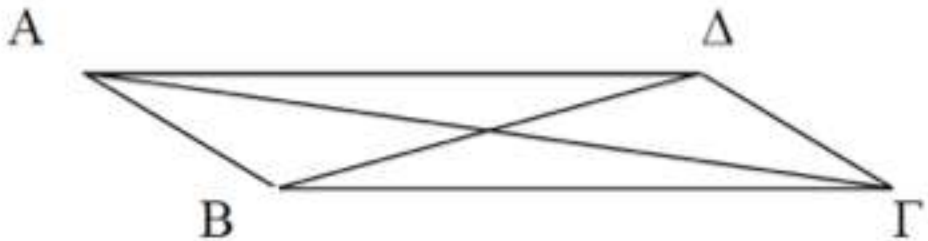


Παράδειγμα

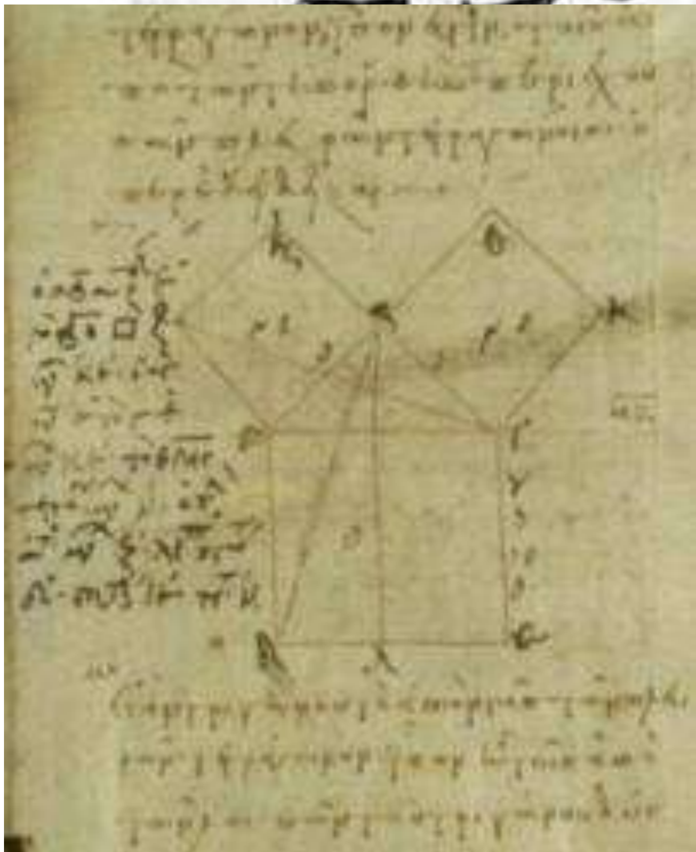
Για εμβάθυνση στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, αναπτύσσεται μια δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές: α) δημιουργούν ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δεδομένες ιδιότητες και β) περιγράφουν τα βήματα της κατασκευής ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Παράδειγμα:

- Να κατασκευάσετε με χρήση του χάρακα, του μοιρογνωμονίου και του διαβήτη (ή με χρήση λογισμικού) ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη 5,1cm και 3,2cm και σχηματίζουν γωνία 52°.

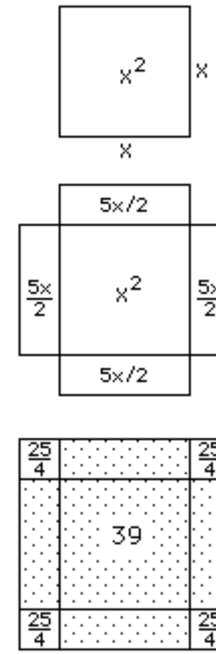
- Να περιγράψετε τον τρόπο που κατασκευάστηκε με χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (ή με χρήση λογισμικού) το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες έχουν μήκη ΑΓ = 6cm, ΒΔ = 3,5cm και σχηματίζουν γωνία 66°.



Ευχαριστούμε!



Πυθαγόρας 4ος αι.



Αλ- Χουαρίζμι 9ος αι.

Gaulois

ος αι.ς