Η σημασία της εννοιολογικής κατανόησης κατά τη μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Περίληψη

Οι πρωτοετείς φοιτητές αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα κατά τη μετάβαση τους από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο. Τα προβλήματα αυτά έχουν δύο βασικές αιτίες. Η μια αφορά στην αλλαγή του κοινωνικού και του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Όπως προκύπτει από πολλές μελέτες, οι νέοι φοιτητές αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα προσαρμογής στο νέο κοινωνικό και ακαδημαϊκό περιβάλλον στο οποίο εντάσσονται και αυτά τα προβλήματα επιδρούν σημαντικά στις σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η δεύτερη αιτία αφορά στο αντικείμενο το οποίο σπουδάζουν. Ειδικότερα όσον αφορά στα Μαθηματικά, η μαθηματική εκπαίδευση που αποκτούν οι μαθητές στο σχολείο έχει σημαντικές ποιοτικές διαφορές από τη μαθηματική εκπαίδευση η οποία απαιτείται στο Πανεπιστήμιο. Σε αυτές τις διαφορέςβρίσκεται η ρίζα πολλών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν πολλοί πρωτοετείς φοιτητές, ιδιαίτερα σε τμήματα Μαθηματικών. Μια τέτοια διαφορά είναι η ανάγκη για εννοιολογική κατανόηση. Στην παρουσίαση, θα αναφερθούν στοιχεία από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, καθώς και από την εμπειρία μου από τη διδασκαλία σε πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, τα οποία δείχνουν ότι η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και πολύ περισσότερο η μη συνειδητοποίηση της ανάγκης για εννοιολογική κατανόηση, βρίσκεται πίσω από πολλά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο.

Εισαγωγή

Η μετάβαση από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία. Σε αυτή τη μετάβαση συντελούνται τρεις μεγάλες αλλαγές στη ζωή του φοιτητή. Η κοινωνική αλλαγή, η αλλαγή του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο οποίο σπουδάζει και η αλλαγή στον τρόπο που πρέπει να «αντιμετωπίσει» τα μαθηματικά. Οι τρεις αυτές αλλαγές συνδέονται. Θετικά βήματα στη μια κατεύθυνση επηρεάζουν θετικά και τις άλλες και καθυστερήσεις στη μια επηρεάζουν αρνητικά τις άλλες. Η προσαρμογή στις νέες συνθήκες έχει μεγάλο κόστος για πολλούς φοιτητές.
Πολλές διεθνείς έρευνες μελετάνε το πρόβλημα της μετάβασης εστιάζοντας στη μια ή στην άλλη απο τις παραπάνω αλλαγές. Στην ομιλία αυτή θα εστιάσουμε στη μετάβαση από τα μαθηματικά του σχολείου στα μαθηματικά του Πανεπιστημίου. Έχει διαπιστωθεί η ύπαρξη ασυνέχειας, ενός κενού, μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και του πανεπιστημίου (Luk, 2005, Kajander & Lovric, 2005, Winslow, 2013). Ο τρόπος που οι μαθητέςμαθαίνουν να μελετάνε τα μαθηματικά στο σχολείο και αυτός που πρέπει να τα μελετάνε στο πανεπιστήμιο είναι ποιοτικά διαφορετικός. Στο πανεπιστήμιο απαιτείται από τους φοιτητές να κατανοούν τις έννοιες ώστε να μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν στις αποδείξεις. Να κατανοούν τις αποδείξεις των

θεωρημάτων ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν τις ιδέες κλειδιά που υπάρχουν σε αυτές για να αποδείξουν άλλες ιδιότητες και να λύσουν ασκήσεις. Αντίθετα στο σχολείοη μελέτη εστιάζει στην εκμάθηση διαδιασιών και μεθόδων.Αν παρατηρήσειεκάποιος προσεκτικά πώςσκέφτονται αρκετοί μαθητές, ακόμη και μαθητές πουθεωρούνται καλοίστα Μαθηματικά,όταν προσπαθούν να αντιμετωπίσουν μαθηματικά προβλήματα, βλέπειότιέχουνσοβαρές παρανοήσειςσε βασικάθέματα.Αυτόοφείλεται σεμεγάλο βαθμόστηνέλλειψηεννοιολογικής κατανόησης.Αυτοί οι μαθητές έχουν αποκτήσει μια υπολογίσιμη μαθηματικά γνώση καθώς και την ικανότητα να αντιμετωπίζουν ασκήσεις συγκεκριμένου τύπου.Δεν έχουν αποκτήσει όμως την ικανότητα να χρησιμοποιούν τη γνώση τους ευέλικτα, ώστε να μπορούν να λύσουν προβλήματα που δεν είναι παρόμοια με άλλα, γνωστά σε αυτούς από πριν.Δηλαδή, δεν έχουν αποκτήσει ουσιαστική μαθηματική σκέψη.
Οι Hoyles, Newman και Noss (2001) εντοπίζουν την έλλειψη μαθηματικής σκέψης ως μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες των μαθητών κατά τη μετάβαση τους από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

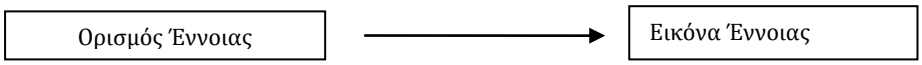
Εννοιολογική κατανόηση και προβλήματα πρωτοετών φοιτητών

Η βάση μιας μαθηματικής θεωρίαςείναι τα αξιώματα. Τα αξιώματα αφορούν σε ιδιότητες πρωταρχικών εννοιών, δηλαδή εννοιών για τις οποίες δεν έχουμε τυπικό ορισμό αλλά τις αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά. Αυτές τις ιδιότητες τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Συνδιάζοντας τα αξιώματα με βάση λογικούς κανόνες αποδεικνύουμε νέες ιδιότητες. Τα μαθηματικά αναπτύσσονται με νέες ιδιότητες που προκύπτουν από τις ήδη γνωστές με βάση λογικούς κανόνεςκαι με νέες έννοιες, οι ορισμοί των οποίων βασίζονται στις ήδη γνωστές έννοιες και στις ιδιότητες που έχουμε ήδη αποδείξει.
Τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης είναι οι ορισμοί, γιατί μέσω αυτών δημιουργούνται οι έννοιες, και οι αποδείξεις οι οποίες, με χρήση λογικών κανόνων, μας οδηγούν από την υπάρχουσα γνώση στη νέα γνώση.
Στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε αυτά ταστοιχεία και θα δούμε το ρόλο τους στη μάθηση των μαθηματικών, πως αυτά χρησιμοποιούνται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και τι προβλήματα δημιουργούνται από αυτή τη χρήση στους πρωτοετείς φοιτητές.

Η σημασία των ορισμών στη μαθηματική εκπαίδευση

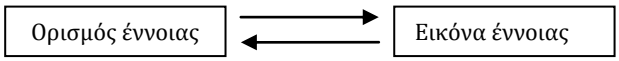
Στα μαθηματικά κάθε έννοια καθορίζεται πλήρως από τον ορισμό της και η διάκριση μεταξύ δύο μαθηματικών αντικειμένων γίνεται με βάση τον ορισμό τους. Για την κατανόηση όμως μιας έννοιας δεν αρκεί μόνο η γνώση του ορισμού της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της έννοιας. Σύμφωνα με τους D. Tall και S. Vinner (1981), με τον όρο «εικόνα έννοιας» (concept image) περιγράφουμε ολόκληρη τη γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με την έννοια. Αυτή η γνωστική δομή περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, διαδικασίες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας που έχει διαμορφώσει ένα άτομο δομείται μέσα από τις εμπειρίες του και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αυτό ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα αυτή περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας (concept definition) πουγνωρίζειτοάτομο (αν γνωρίζει),

αλλάείναι κάτιευρύτερο. Η γνώση μόνο του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της.
Ο Vinner (1991),για να περιγράψειτοντρόπο πουσυνδέονται ο ορισμόςμιας έννοιας μετηνεικόνα τηςέννοιας, απομόνωσετονορισμό από τα υπόλοιπα συστατικάτηςεικόνας και θεώρησε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια. Το ένα κελί αφορά στον *ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο στην *εικόνα της έννοιας* (χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτό ο ορισμός). Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις που απλά απομνημονεύεται ο ορισμός της έννοιας. Πολλοί θεωρούν ότι ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα δύο κελιά συνδέονται με μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



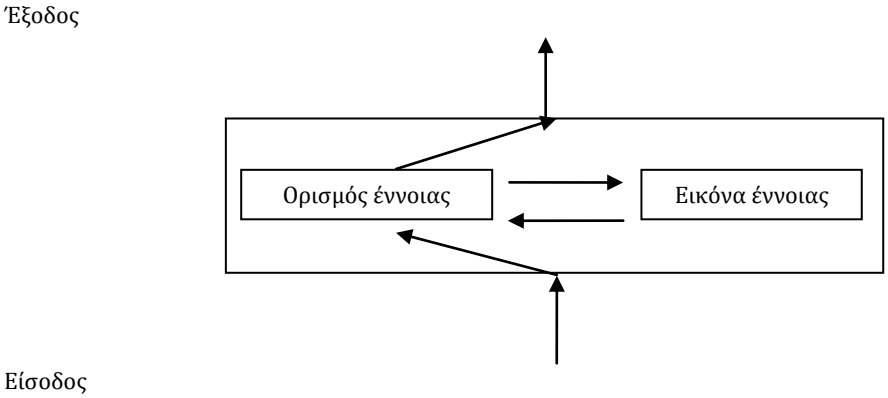
Σχήμα 1: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

Η διαμόρφωση των δύο κελιών όμως μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μπορεί να διαμορφωθούν παράλληλα με αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αλλά μπορούν να διαμορφωθούν και ανεξάρτητα. Ο Vinner (1991) αναφέρειτοακόλουθοσχετικό παράδειγμα. Ένας μαθητής μπορεί να έχει σχηματίσει εικόνα για τα συστήματα συντεταγμένων, ως αποτέλεσμα της παρατήρησης και μελέτης πολλών γραφικών παραστάσεων. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής μπορεί να διαμορφώσει ως ορισμό του συστήματος συντεταγμένων ότι είναι δύο κάθετοι άξονες. Αργότερα μπορεί να μάθει στο μάθημα ότι ένα σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δύο τεμνόμενους (όχι υποχρεωτικά κάθετους) άξονες, οπότε το περιεχόμενο του κελιού που περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας θα διαφοροποιηθεί. Στη συνέχεια τρία είναι τα δυνατά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν:
i) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή της εικόνας.
ii) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη και το κελί του ορισμού για ένα μικρό διάστημα να περιέχει τον ορισμό που έμαθε ο μαθητής, αλλά σύντομα αυτός ο ορισμός να ξεχαστεί. Στην περίπτωση αυτή, όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί πάλι σε σύστημα με κάθετους άξονες. Σε αυτή την περίπτωση ο ορισμός όχι μόνο δεν επηρέασε την εικόνα αλλά γρήγορα ξεχάστηκε.
iii) Και τα δύο κελιά να παραμείνουν αμετάβλητα. Όταν ζητηθεί από τον μαθητή να ορίσει τι είναι σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό που έμαθε στο μάθημα, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.

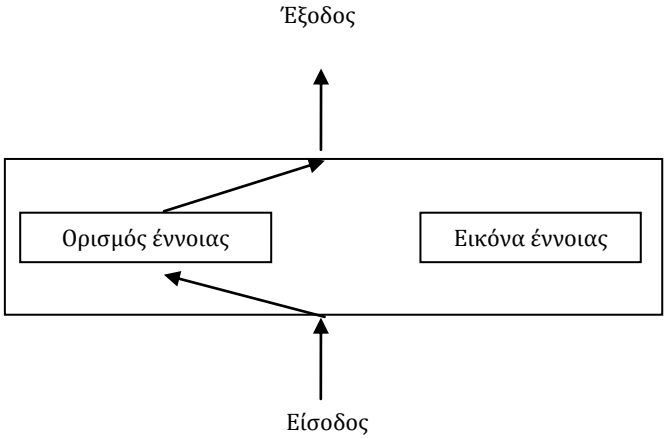


Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

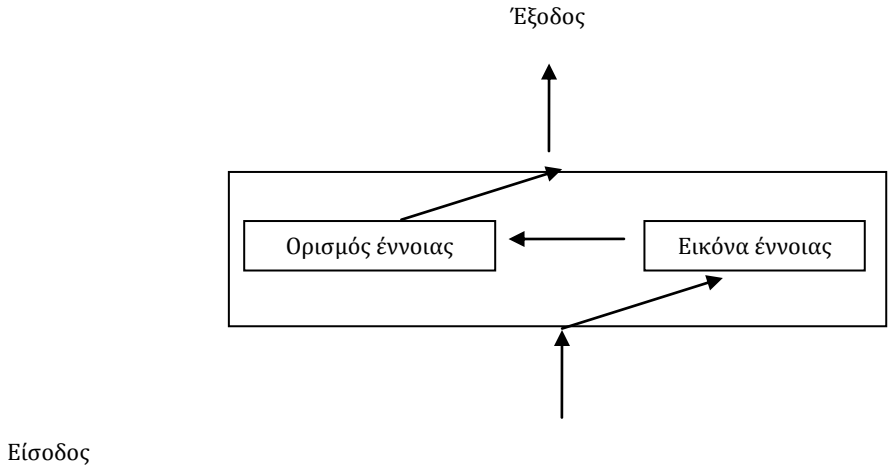
Το σχήμα 2 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών. Η εννοιολογική κατανόηση προϋποθέτει τη συμπλήρωση και τη σωστή σύνδεση των δύο κελιών. Ο μαθητής όχι μόνο πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της έννοιας αλλά πρέπει να έχει δημιουργήσει σωστές αναπαραστάσεις της έννοιας και να μπορεί να τις συνδέει μεταβαίνοντας από τη μια στην άλλη. Αυτό απαιτείται ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε ένα μαθητή, τα κελιά τηςεικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Οι μαθηματικά σωστές διανοητικές διαδικασίες για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει σχηματικά να εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. (Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.)



Σχήμα 3 : Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας.

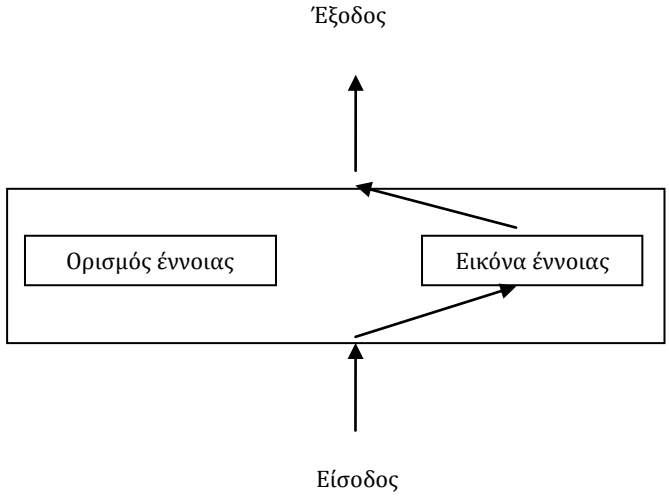


Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας και η τελική απάντηση προκύπτει από την χρήση αυτού. Αυτό είναι και η μαθηματικά σωστή διαδικασία. Όπως όμως έχει προκύψει από αρκετές έρευνες, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο πρότυπο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:



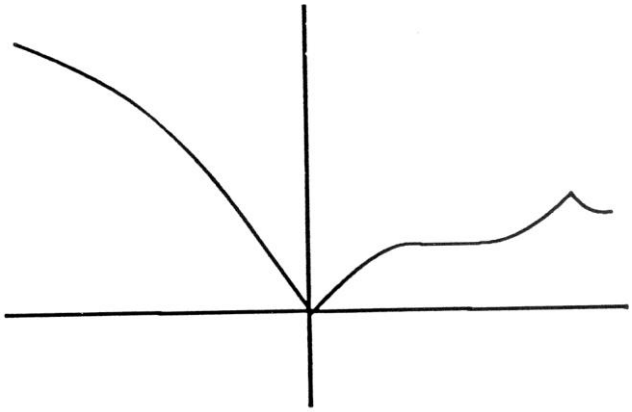
Σχήμα 6: Διαισθητική απάντηση.

Εδώ το κελί του ορισμού έννοιας, αν και μπορεί να μην είναι κενό, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Για να υποστηρίξουμε τον ισχυρισμό ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν χρησιμοποιεί τους τυπικούς ορισμούς κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος θα παρουσιάσουμε τα δεδομένα μιας έρευνας που αφορά στην έννοια της

συνάρτησης (Vinner, 1991). Το δείγμα της έρευνας ήταν 147 πρωτοετείς φοιτητές ενός πανεπιστημίου στην Αγγλία οι οποίοι είχαν τα Μαθηματικά βασικό μάθημα στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στους φοιτητές αυτούς δόθηκε το παρακάτω ερωτηματολόγιο.

1. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;
2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
3. Υπάρχει συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας να είναι η ακόλουθη;



Σχήμα 7: Προκύπτει αυτή η γραφική παράσταση από μια συνάρτηση;

4. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;

Στις πρώτες τρεις ερωτήσεις οι φοιτητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ «ναι» ή «όχι» και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που είχε διδαχθεί σε όλους τους φοιτητές ήταν ότι, συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Παρά ταύτα, μόνο το 57% των φοιτητών έδωσε αυτόν ή κάτι ισοδύναμο με αυτόν τον ορισμό ως απάντηση στην ερώτηση 4. Το 14% των φοιτητών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας *κανόνας* αντιστοίχισης και απέρριψαν τη δυνατότητα μιας αντιστοιχίας η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο κανόνα. Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας τύπος ή μια εξίσωση. Το υπόλοιπο ποσοστό δεν έδωσε ικανοποιητική απάντηση ή δεν απάντησε. Σε ότι αφορά στις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε συγκεκριμένες καταστάσεις (στις ερωτήσεις 1 και 2) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των φοιτητών θεωρούσαν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από έναν ενιαίο τύπο ή, εάν δίνονται δύο τύποι, τότε θα πρέπει τα επιμέρους πεδία ορισμού για τον κάθε τύπο να είναι διαστήματα. Ένας κανόνας για ένα μόνο σημείο (όπως στην ερώτηση 1) δεν δίνει συνάρτηση. Μερικοί φοιτητές θεώρησαν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δεν δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις έχει θεωρήσει ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή μια ειδική αναφορά. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 2). Άλλοι φοιτητές (περίπου τα 2/5) πίστευαν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3.) Έτσι, πολλοί φοιτητές που όρισαν τη «συνάρτηση» σωστά δεν χρησιμοποιούσαν τον ορισμό της όταν απαντούσαν τις ερωτήσεις 1-3. Μόνο το ένα τρίτο των φοιτητών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 1-3. Κανένας φοιτητής από αυτούς που

έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησε στις ερωτήσεις 1-3 σωστά. Αντίστοιχες έρευνες στην Ελλάδα δείχνουν αντίστοιχα αποτελέσματα. Πολλοί μαθητές τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν έχουν μάθει τη σημασία που έχουν οι ορισμοί στα μαθηματικά. Σε συζήτηση πρωτοετής φοιτητής του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ στο τέλος του πρώτου έτους των σπουδών του, ανέφερε ότι πολλά προβλήματα που αντιμετώπισε με τα μαθήματα στο πρώτο εξάμηνο των σπουδών του οφείλονταν στο ότι δεν έδινε τη σημασία που έπρεπε στην κατανόηση των ορισμών. Συγκεκριμένα είπε

> «Στο σχολείο μαθαίναμε τους ορισμούς αλλά μετά δεν τους χρησιμοποιούσαμε ουσιαστικά στις ασκήσεις. Έτσι και στο πανεπιστήμιο στην αρχή δεν έδινα ιδιαίτερο βάρος στην κατανόηση των ορισμών. Μου πήρε χρόνο να συνειδητοποιήσω ότι αν δεν γνωρίζεις καλά τους ορισμούς δεν μπορείς να λύσεις ασκήσεις »

Αυτός ο φοιτητής είχε πάρει στις Πανελλαδικές Εξετάσεις περίπου 19000 μόρια. Φυσικά, όταν συνειδητοποίησε πως έπρεπε να διαβάζει δεν είχε πρόβλημα με τις σπουδές του.

Η σημασία των αποδείξεων στη μαθηματική εκπαίδευση

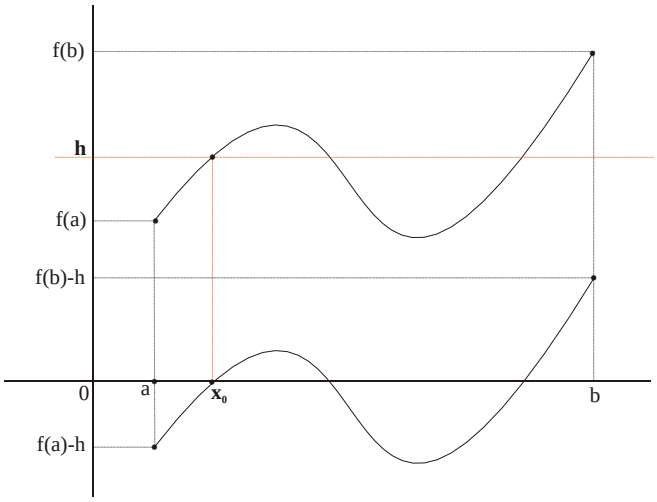
Ηαπόδειξη στα μαθηματικά είναι απαραίτητη για να συμπεράνουμε την αλήθεια ενός ισχυρισμού. Συνεπώς ένας στόχος της διδασκαλίας αποδείξεων στο σχολείο είναι να γίνει σαφές στους μαθητές ότι στα μαθηματικά μόνο η απόδειξη μας πείθει γα την ισχύ ενός θεωρήματος. Πολλοί θεωρούν ότι αυτός ο στόχος είναι και ο μοναδικός.Από εκεί και πέρα σημασία έχει ο μαθητής να ξέρει το θεώρημα για να μπορεί να λύνει ασκήσεις. Αυτή η αντίληψη οδηγεί σε μια συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση στη διδασκαλία των αποδείξεων στο σχολείο. Μια προσέγγιση που έχει μοναδικό σκοπό να δείξει γιατί οι επιμέρους ισχυρισμοί που περιέχονται σε μια απόδειξη είναι σωστοί, χρησιμοποιώντας την ήδη γνωστή θεωρία. Δηλαδή, να καταλάβουν οι μαθητές ότι η ακολουθία των μαθηματικών συλλογισμών η οποία ξεκινάει από κάτι που ισχύει και, χρησιμοποιώντας γνωστή θεωρία, καταλήγει στο συμπέρασμα του θεωρήματος, είναι σωστή. Αυτή η διδακτική προσέγγιση των αποδείξεων, η οποία στη βιβλιογραφία ονομάζεται *συντακτική απόδειξη* (syntactic proof) (Weber and Alcock, 2004),δημιουργεί στους μαθητές μια συγκεκριμένη στάση όσον αφορά στις αποδείξεις θεωρημάτων. Πιστεύουν ότι, γνωρίζω μια απόδειξη σημαίνει ότι μπορώ να την γράψω σωστά. Αυτή η στάση έχει ως συνέπεια, όταν μελετούν μια απόδειξη να προσπαθούν να μάθουν τα διαδοχικά βήματα που οδηγούν στο συμπέρασμα και, στην καλύτερη περίπτωση, γιατί αυτά είναι σωστά.

Αυτός όμως πρέπει να είναι ο μοναδικός στόχος της διδασκαλίας της απόδειξης; Να πειστούν οι μαθητές ότι το θεώρημα είναι σωστό;Ένας τέτοιος αποκλειστικός στόχος περιορίζει ασφυκτικά τη σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης και δεν συμβάλλει ουσιαστικά στην εννοιολογική κατανόηση και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.Μια απόδειξη περιέχει κάποιες σημαντικές ιδέες κλειδιά, η ανάδειξη των οποίων πρέπει να είναι βασικό στοιχείο της διδασκαλίας της. Και πρέπει να είναι βασικό στοιχείο γιατί αυτές τις ιδέες κλειδιά, ο μαθητής που θα τις κάνει κτήμα του θα μπορεί να τις αξιοποιήσει και σε άλλες περιπτώσεις. Σε μαθηματικά προβλήματα που αυτές οι ιδέες βοηθάνε στην επίλυση τους.

Αλλά και αυτό δεν είναι αρκετό. Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης συνδέεται και με την επινόηση αυτών των ιδεών. Μέσα από ποιες νοητικές διαδικασίες προέκυψαν αυτές οι ιδέες; Πως οι προηγούμενες γνώσεις αξιοποιήθηκαν και οδήγησαν σε αυτές τις ιδέες.Αυτά είναι στοιχεία που πρέπει να περιέχονται στη διδασκαλία μιας απόδειξης, γιατί αυτά είναι τα στοιχεία που "φωτίζουν" την απόδειξη. Που αναδεικνύουν το ουσιαστικό περιεχόμενο της και που συντελούν στην μαθηματική ανάπτυξη του μαθητή.
Μια διδακτική προσέγγιση της απόδειξης με τα παραπάνω χαρακτηριστικά στη βιβλιογραφία ονομάζεται *σημασιολογική απόδειξη* (symantic proof) (Weber and Alcock, 2004).
Θα προσπαθήσω να αναδείξω την διαφορά που έχουν οι δύο παραπάνω προσεγγίσεις μέσα από την απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:
" Αν $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $h \in \mathbb{R}$, ώστε $f(a) < h < f(b)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = h$."

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για h=0, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.
Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b] \to \mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-h$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano και άρα υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=h$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη. Εύκολα μπορεί να μάθει ένας μαθητής τα βήματα της απόδειξης ώστε να είναι σε θέση να την γράψει σωστά όταν του ζητηθεί Μια διδακτική προσέγγιση που απλώς περιγράφει την παραπάνω διαδικασία αποτελεί μια συντακτική προσέγγιση της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος, Ποια είναι όμως η ιδέα κλειδί στην παραπάνω απόδειξη; Πόσοι κατανοούν μέσα από την τυπική περιγραφή ότι η ιδέα είναι η κατακόρυφη μεταφορά της συνάρτηση g κατα -h, ώστε το πρόβλημα να αναχθεί στην ύπαρξη σημείου μηδενισμού μιας συνάρτησης με ετερόσημες τιμές στα άκρα, το οποίο αντιμετωπίζεται με το γνωστό από πριν θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή της παραπάνω απόδειξης με τη χρήση οπτικής αναπαράστασης (σχήμα 8) αναδεικνύει αυτή την ιδέα και βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση της απόδειξης.



Σχήμα 8

Οι δύο προσεγγίσεις που περιγράψαμε παραπάνω δεν αφορούν μόνο τις αποδείξεις των θεωρημάτων αλλά και τις αποδείξεις ασκήσεων και προβλημάτων. Η απλή γνώση μεθοδολογιών για τη λύση συγκεκριμένου τύπου ασκήσεων συνδέεται με τη συντακτική προσέγγιση των αποδείξεων. Ο μαθητής μαθαίνοντας μια μεθοδολογίαμαθαίνειτη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει όταν έχει να αντιμετωπίσει συγκεκριμένου τύπου προβλήματα. Όταν όμως έχει να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα που δεν εντάσεται σε αυτόν τον τύπο προβλημάτων, αλλά κάποια ιδέα που περιέχεται στη μεθοδολογίαπου γνωρίζει ή μια τροποποίηση αυτής μπορεί να αξιοποιηθεί για την επίλυση του, το πιθανότερο είναι να μην το καταλάβει και να αξιοποιήσει τη γνώση που έχει.
Στο πανεπιστήμιο απαιτείταιη σημαντική προσέγγιση των αποδείξεων. Ο φοιτητής πρέπει να κατανοήσει ουσιαστικά μια απόδειξη ώστε, όχι μόνο να μπορεί να την γράψει αν του ζητηθεί, αλλά να είναι σε θέση να αξιοποιήσει τις ιδέες που υπάρχουν σε αυτήν καισε άλλες περιπτώσεις. Η συντακτική κατανόηση μιας απόδειξης και η προσπάθεια ομαδοποίησης ασκήσεων και ανάπτυξης συγκεκριμένης μεθοδολογίας δεν έχει πρακτική αξία. Αυτό οφείλεται στο ότι οι ασκήσεις στο πανεπισήμιο είναι κυρίως θεωρητικές και οι διαδικασίες στις αποδείξεις δεν είναι απλές. Ακόμη και η ίδια διαδικασία για να εφαρμοστεί σωστά απαιτεί εννοιολογική κατανόηση. Εύκολα μπορεί να κάνει κάποιος λάθος σε κάτι που δεν το έχει κατανοήσει πλήρως. Για παράδειγμα, στο μαθημα του Απειροστικού Λογισμού στο πρώτο έτος, οι φοιτητές διδάσκονταιότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών. Για την απόδειξη αυτής της ιδιότηταςκατασκευάζουμε με επαγωγική διαδικασία την ακολουθία, επιλέγοντας τους όρους της έτσι ώστε αφενός να προσεγγίζουν τον αριθμό με τέτοιο τρόπο που να εξασφαλίζεται ότι η ακολουθία που θα δημιουργηθεί θα συγκλίνει σε αυτόν, αφετέρου κάθε όρος να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο. Η διαδικασία αυτή αν δεν κατανοηθεί δεν είναι εύκολο να αποδοθεί σωστά. Ίδια διαδικασία απαιτείται και για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι το ελάχιστο άνω φράγμαενός άνω φραγμένου και μη κενού συνόλου, αν δεν ανήκει στο σύνολο είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας στοιχείων του συνόλου. Σε πρόσφατες εξετάσεις που ζητήθηκε από τους φοιτητές να αποδείξουν τον παραπάνω ισχυρισμό,μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό (λιγώτερο του 10%) απάντησεσωστά. Οι περισσότεροι δεν μπόρεσαν να γράψουν σωστά τη διαδικασία που είχαν διδαχθεί. Από τις απαντήσεις των περισσοτέρων ήταν σαφές ότι είχαν διαβάσει τη διαδικασία κατασκευής μιας ακολουθίας με τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά δεν την είχαν κατανοήσει εννοιολογικά ώστε να μπορούν να την αναπαράξουν σωστά.
Για την εννοιολογική κατανόηση μιας απόδειξηςαναγκαία προϋπόθεση είναι η σωστή κατανόηση των λογικών κανόνων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Σε πολλά γραπτά φοιτητών φαίνεται η σύγχιση που υπάρχει στη χρήση των όρων «συνεπάγεται» και «ισοδύναμο»καθώς και των αντίστοιχων συμβόλων. Οι μαθητές στο σχολείο έχουν μάθει ότι για να αποδείξουν μια σχέση μπορούν να ξεκινήσουν από αυτή και με ισοδυναμίες να καταλήξουν σε μία σχέση που ισχύει. Αν αυτή η διαδικασία δεν έχει γίνει εννοιολογικά κατανοητή, δηλαδή τι σημαίνει ισοδυναμία και γιατί η ισχύ της σχέσης που καταλήγουμε μας εξασφαλίζει την ισχύ της αρχικής, τότε ο

μαθητής μπορεί να εφαρμόζει αυτή τη διαδικασία και σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει ισοδυναμία. Πολύ συχνά, φοιτητές θέλοντας να αποδείξουν μια σχέση ξεκινούν από αυτή και με απλές συνεπαγωγές, που πολλές φορές δεν αντιστρέφονται, καταλήγουν σε κάτι που ισχύει και θεωρούν ότι έχουν αποδείξει το ζητούμενο. Υπάρχουν και περιπτώσεις που οι συνεπαγωγές αντιστρέφονται οπότε η απόδειξη θα ήταν σωστή αν αντί του συμβόλου " $\Longrightarrow$ " χρησιμοποιείτο το σύμβολο " $\Leftrightarrow$ " αλλά αυτός που γράφει φαίνεται ότι δεν καταλαβαίνει τη διαφορά.

Συμπεράσματα

Ο τρόπος μελέτης των μαθηματικών που αναπτύσσουν οι μαθητές στο σχολείο, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας τους για τις εξετάσεις εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, δεν είναι αποτελεσματικός για τις σπουδές τους στο πανεπιστήμιο. Για την επιτυχή πορεία τους στις πανεπιστημιακές τους σπουδές, απαιτείται ποιοτικά διαφορετικός τρόπος μελέτης ο οποίος έχει βαση την εννοιολογική κατανόηση. Οι φοιτητές πρέπει να κατανοούν ουσιαστικά τις έννοιες, τα θεωρήματα και τις αποδείξεις που μελετούν, ώστε να μπορούν να τα αξιοποιήσουν στις ασκήσεις και στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Η έλλειψη της ανάγκης για τέτοιου τύπου κατανόηση στις σχολικές σπουδέςτους δημιουργεί πεποιθήσειςοι οποίες αποτελούν εμπόδιο στη συνειδητοποίηση της αλλαγής που πρέπει να κάνουν στον τρόπο μελέτης των μαθηματικών. Αυτό είναι ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα κατά τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στη τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

Hoyles, C., Newman, K., Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2001, vol. 32, no. 6, 829-845.*

Kajander, A. &Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2–3), 149–160.

Luk, H.S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2–3), 161–174.

Tall, D.O. &Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Vinner, S.: 1991, 'The role of definitions in teaching and learning', in D. Tall (ed.),Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, Dordrecht, pp. 65–81.

Weber, K. &Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. Educational Studies in Mathematics, 56, 209-234.

Winsløw, C. (2013). The transition from university to high school and the case of exponential functions.In B. Ubuz, C. Haser& M. A. Mariotti (Eds.),*Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2476–2485). Ankara: ERME.